

土地，成長と収束

内 島 敏 之

この論文は，ソローの新古典派成長モデルに土地を導入する。土地の供給量は，一定である。この特性が，土地を新古典派の成長モデルに導入する際にひとつの困難をもたらす。新古典派成長モデルの長期均衡（均斉成長，均衡成長などともいう）では，全ての絶対変数は同一の率で成長し，比率一定の経済が実現する。

土地の供給量が一定であるという特性は長期均衡と両立し得るのかいなが，重要な問題となる。

さらに土地は，生産要素としての機能を果たし地代所得を生み出すと同時に，その保有者に資産としての所得，つまりキャピタル・ゲイン所得をももたらす。

経済学では，初めは生産要素としての土地の供給量一定という特性に焦点をあて分析がなされてきた。しかし，次第に資産としての土地の機能に力点がおかれるようになってきた。

生産要素としての土地が経済成長・発展に及ぼす効果の分析は，古典派以来長い歴史をもつが，その集大成のひとつとしてMeade (1968)が，そして最新のもとしてMalinvaud (1998) の5章パート4，6章パート3があげられよう。

資産としての土地が経済成長に果たす役割りを分析するモデルは，Nichols (1970) が初めてであろう。複数資産をもつ成長モデルとしては，資本と貨幣との二つの資産をもつ貨幣成長モデルがTobin (1965) により展開されていた。さらに複数資本財の成長モデルが，いわゆる“Hahn

(1966) の問題”として研究されていた。

これらの研究に触発され、Nichols の論文が、*American Economic Review* に発表された。しかし、その後この論文は学界ではほとんど無視されてきたようである。つまり、他の論文において引用されることはなかった。事実、*American Economic Review* においては、このNichols の論文を拡張するものやこの論文に対するコメントは見当たらない。

筆者の知る限り、Nichols の論文を引用している初めてのものは、佐藤 (1991) である。80年代後半の日本はバブル経済であり、地価高騰を分析する研究がわが国で多くみられるが、Asako (1991), Boone and Sachs (1990), 西村・三輪 (1990) をあげておこう。

これらの研究において、Nichols モデルのアイデアが必ずしも正確には導入されていないと思われる。Nichols モデルの構造を明確にすることが、この論文の主要テーマである。

なお、Nichols の論文を補強するものとして、直接には土地を成長モデルに導入したものではないが、複数資産の成長モデルを分析する Shell, Sidrauski and Stiglitz (1969) の秀れた論文があげられる。

1 モデル

ソローの新古典派の成長モデルに、生産要素と資産という二つの機能をもつ土地を導入する。

三つの生産要素、資本 K 、土地 L 、労働 N の投入により生産物 Y が生産され、技術進歩もまた生産に貢献する。

また、家計が保有する資産 H は、再生産可能な資本とその供給量が一定である土地の二つである。

要素増加（あるいは拡大）型技術進歩と相対的希少性仮設 一次同次の生産関数を

$$Y = F(K, A(t)L, B(t)N)$$

とする。ここで $A(t)$ は土地増加型技術進歩 land augmenting technical progress を, $B(t)$ は労働増加型技術進歩を示す。

AL を効率土地, BN を効率労働とよぶ。技術進歩率は一定 g_A, g_B である, つまり

$$\dot{A}(t)/A(t) = g_A, \dot{B}(t)/B(t) = g_B$$

であると仮定する。

労働増加型技術進歩については, すでに多くの分析がある。土地増加型技術進歩は, Nichols (1970) により導入された。土地増加型技術進歩の一例として, 最近のわが国で重要となっている土地利用の規制緩和があげられるであろう。

技術進歩についての仮説として相対的希少性仮説があげられる。これは相対的に希少となる生産要素を技術進歩により補充するというものである。長期的にみると, 相対的に希少となるのは, 土地, 労働, 資本の順であろう。相対的に希少となる生産要素の価格は, 他の生産要素と比較して上昇する。したがって相対的にコスト高となる生産要素を技術進歩により補充しようとするインセンティブが企業に生じる。

この仮設のもとでは, 要素増加型技術進歩率につき $g_A \geq g_B$ (等号は土地供給のみならず労働供給もまた一定である時) であると想定できよう。

新古典派的生産関数 一次同次である強い凹の生産関数は, 新古典派的である, つまり

① $0 < K, AL, BN < \infty$ につき

$$F_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial K} > 0, F_2 \equiv \frac{\partial F}{\partial (AL)} > 0, F_3 \equiv \frac{\partial F}{\partial (BN)} > 0$$

$$F_{11} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, F_{22} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial (AL)^2} < 0, F_{33} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial (BN)^2} < 0$$

② (稲田の条件)

$$\lim_{k \rightarrow 0} F_1 = \lim_{AL \rightarrow 0} F_2 = \lim_{BN \rightarrow 0} F_3 = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_1 = \lim_{AL \rightarrow \infty} F_2 = \lim_{BN \rightarrow \infty} F_3 = 0$$

であると仮定する。

これら①, ②の仮定のもとで, 一次同次の新古典派的生産関数について, さらに

$$F(0, AL, BN) = F(K, 0, BN) = F(K, AL, 0) = 0$$

が成立する。つまり, 生産要素 K, AL, BN は, それぞれ生産に不可欠 essential である。

ニコルス中立的技術進歩 均衡成長と両立する技術進歩のタイプを明らかにしよう。

変数 x の成長率を $G(x)$ とする。生産関数を微分して

$$G(Y) - G(BN) = \theta_1 \{G(K) - G(BN)\} + \theta_2 \{G(AL) - G(BN)\}$$

を得る。ここで

$$\theta_1 = K \frac{\partial F}{\partial K} / Y, \quad \theta_2 = AL \frac{\partial F}{\partial (AL)} / Y$$

である。比率一定の均衡成長経路では, 所得分配率 θ_1, θ_2 は一定であり, かつ

$$G(Y) - G(BN) = \theta_1 \{G(K) - G(BN)\} + \theta_2 \{G(AL) - G(BN)\} = 0$$

が成立する。したがって

$$G(Y) = G(K) = G(AL) = G(BN)$$

となる。要素増加型技術進歩率につき, $G(L) = 0$ より

$$G(A) = G(BN)$$

が成立せねばならない。

したがって, ①労働力成長率がゼロである時には $G(A) = G(B) > 0$, ②労働力成長率が正である時には $G(A) = G(B) + g_n$, $G(B) \geq 0$, がそれぞれ成立せねばならない。

[命題1] (ニコルス中立的技術進歩)

技術進歩が土地増加型, 労働増加型である, つまり

$$Y = F(K, A(t)L, B(t)N)$$

である時, 均衡成長と両立するための十分条件は,

$$G(A) = G(BN)$$

である。

この十分条件を満たす技術進歩の型を, 最初に導入した Nichols (1970) にちなみニコラス中立的技術進歩とよぼう。

以下では, $G(A) = G(N) = g > 0$, $G(B) = 0$ と仮定する。そして, 純粋に土地増加型技術進歩をもつ生産関数を

$$Y = F(K, A(t)L, N) \tag{1}$$

と書くことにする。

企業の利潤最大化 生産物価格を1としよう。資本レンタル価格を r , 地代を Q , 賃金率を w とすると, 企業の利潤は,

$$Y - rK - QL - wN$$

である。利潤最大化より,

$$\left. \begin{aligned} r &= F_1(K, AL, N) \\ Q &= AF_2(K, AL, N) \\ w &= F_3(K, AL, N) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

が導かれる。

生産要素の完全利用・雇用がいつの時点でも実現する新古典派の世界を想定する。

資産市場の均衡 二つの生産的資産, 資本と土地とが存在する。資本と土地とは完全に代替的資産であると仮定する。すると, 二つの資産の収益率は等しくなければならない。地価を V , 予想地価を V^e とすると, 資産市

場の均衡条件は、

$$r = \frac{Q}{V} + \frac{\dot{V}^e}{V} \quad (3)$$

となる。右辺第1項は生産要素としての土地が産む収益率、第2項は資産としての土地保有から生じると予想される収益率である。

生産物をニューメレールとしているので、資産としての資本が生み出す期待値上がり益はゼロである。もし土地をニューメレールとするのであれば、資産市場の均衡条件式は修正されねばならないし、得られる結果もまた異なってくるであろう。いずれにしろ貨幣を導入しない限り、ニューメレール選択の問題は解決されない。

資産市場が均衡する時、

$$r - \frac{\dot{V}^e}{V} = \frac{Q}{V} > 0$$

である。したがって予想地価上昇率は、資本収益率（これを単に利子率とよぶ）を上回ることはできない。

キャピタル・ゲインと貯蓄行動 土地の所有者は、完現するキャピタル・ゲイン（ $\dot{V}L$ ）を地代所得とともに所得の一部として勘定するであろう。すると、実現するキャピタル・ゲインの一部を消費に、残りを貯蓄にまわすであろう。期待キャピタル・ゲイン（ $\dot{V}^e L$ ）のうち、実現しない部分、つまり（ $\dot{V}^e - V$ ） L を所得の一部と土地保有者がみなすかいないかの問題はここでは考えない。期待形成につき完全予見、つまり

$$\dot{V}^e = \dot{V} \quad (4)$$

を仮定する。

すると個人の総所得は、要素所得（あるいは可処分所得） Y プラス実現キャピタル・ゲイン所得 $\dot{V}L$ とからなる。このように定義される総所得は、個人購買力 Individual Purchasing Power とよばれる（Shell, Sidrauski

and Stiglitz (1969) 15ページを参照)。

貯蓄関数については、個人購買力からの貯蓄率が一定であるという Nichols (1970) の仮定を一般化し、次のようなタイプを考えよう。要素所得 Y からの一定の貯蓄率を s 、実現するキャピタル・ゲイン所得 ($\dot{V}L$) からの一定の貯蓄率を α とし、貯蓄 S は、

$$S = sY + \alpha \dot{V}L$$

と決定されると仮定する。

実質資産 $H = K + VL$ の増加分は、 L が一定であるので、

$$\dot{H} = \dot{K} + \dot{V}L$$

である。

生産物市場の均衡条件 $S = \dot{H}$ より、

$$\dot{K} + (1 - \alpha) \dot{V}L = sY \quad (5)$$

が導かれる。

動学体系は、(1)、(2)、(3)、(4)、(5)により構成される。

2 均衡成長

労働供給の初期賦存量を N_0 とし、次の記号

$$y = \frac{Y}{N}, \quad k = \frac{K}{N}, \quad l = \frac{L}{N_0}, \quad v = \frac{V}{A}, \quad q = \frac{Q}{A},$$

を定める。生産関数について

$$y = F(k, l, 1) \equiv f(k, l)$$

とすると、利潤最大化条件は

$$r = \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \equiv f_1(k, l)$$

$$q = \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \equiv f_2(k, l)$$

$$w = y - kf_1 - lf_2$$

となる。

以下では、資本と土地とは補完的である、つまり $f_{12}(k, l) > 0$ を仮定する。

生産関数がコブ・ダグラス型である時、これを

$$Y = k^a (AL)^b N^{1-(a+b)}, \quad 0 < a+b < 1$$

$$y = k^a l^b$$

と記す。この時、資本と土地とは補完的 ($F_{12} = F_{21} > 0$) であり、土地と労働ともまた補完的 ($F_{23} = F_{32} > 0$) となる。

これまでのモデルを小文字を用い表現し直すと、次の微分方程式

$$\dot{k} = sy - gk + (1 - \alpha)(q - rv)l \equiv A(k, v) \quad (6)$$

$$\dot{v} = (r - g)v - q \equiv B(k, v) \quad (7)$$

を導出できる。

さらに、資本蓄積率非負の制約は、

$$\frac{\dot{K}}{K} = sy + (1 - \alpha)(q - rv)l \geq 0 \quad (8)$$

となる。

しばらくは、 $0 < s \leq \alpha < 1$ を仮定する。

均衡成長の動学的効率性 均衡成長のもとでは、 $\dot{k} = 0$, $\dot{v} = 0$ が成立する。

よって、(6), (7) より、

$$\hat{v} = \frac{s\hat{y} - g\hat{k} + (1 - \alpha)\hat{q}l}{(1 - \alpha)\hat{r}} \quad (9)$$

$$\hat{v} = \frac{\hat{q}}{\hat{r} - g} \quad (10)$$

となる。以下、均衡成長解には記号ハットを用いる。

均衡成長解が存在すると、(10) より、

$$\hat{r} > g$$

を示すことができる。つまり均衡成長は、動学的に効率的である。資本ス

トックに加えてもうひとつの資産である土地をモデルに導入することにより、均衡成長が動学的に非効率となる（つまり $r < g$ ）ケースを排除できるのである。

ここで(9), (10)より,

$$(r-g)(s\hat{y}-g\hat{k}) = (1-\alpha)gl\hat{q} \quad (11)$$

となる。 $\hat{k} > 0$ のもとでは、 $r > g$ より、まず

$$s\hat{y} > g\hat{k}$$

が成立する。

したがって、他の条件が同一の時、土地のない ($v=0, q=0$) ソローの成長モデルの k の均衡成長解 ($sy=gk$ を満たす k) よりも、土地があるモデルの解 \hat{k} の値は小さくなる。

続いて

$$y = rk + ql + w$$

を(11)に代入すると,

$$(sr-g)\{(r-g)\hat{k} + \hat{q}l\} + (r-g)sw = (s-\alpha)g\hat{q}l$$

を導くことができる。

したがって

$$s \leq \alpha \Rightarrow sr < g$$

という重要な結果を導くことができる。

動学体系の図解 曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きは、(6)より

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{A_k}{A_v} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{sr-g}{(1-\alpha)l} + (f_{12} - vf_{11}) \right\}$$

となる。右辺の中カッコ内第2項は正である。ここで $sr=g$ を満たす k の値を k_1 としよう。すると $0 < k \leq k_1$ につき $sr \geq g$ となるので、曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きは正である。

$k > k_1$ であると、この傾きの正負は一般的には確定しない。 $sr-g$ の負

の値が、右辺第2項の正値を絶対値でみて上回りはじめると、曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きは負となるであろう。

曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きがゼロとなる k の値を k_{II} としよう。すると、

$$0 < k \leq k_I \text{ のとき } \quad dv/dk > 0$$

$$k \geq k_{II} \quad \text{の時} \quad dv/dk \leq 0 \quad (\text{等号は } k = k_{II} \text{ の時)}$$

となる。そして、 $k_I < k < k_{II}$ については、曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きは、正あるいは負のどちらの値もとり得るのである。

曲線 $\dot{k} = 0$ は原点を通ると仮定する。(6)において $k = 0$, $v = 0$ とすると、曲線 $\dot{k} = 0$ が原点を通るには $q = f_2(0, l) = 0$ でなければならない。この性質を満たす生産関数として、たとえばコブ・ダグラス型があげられる。なぜならば、 $q = by/l$ であるからである。

図1に、曲線 $\dot{k} = 0$ が描かれている。

曲線 $\dot{v} = 0$ は直角双曲線となるが、この傾きは、

$$\frac{dv}{dk} = - \frac{B_k}{B_v} = \frac{f_{12}}{r-g} - \frac{qf_{11}}{(r-g)^2}$$

となる。 $r > g$ を満たす k について、 $f_{12} > 0$ の仮定のもとでは、この傾きは正となる。

曲線 $\dot{v} = 0$ もまた原点を通ると仮定し、図1に描かれている。

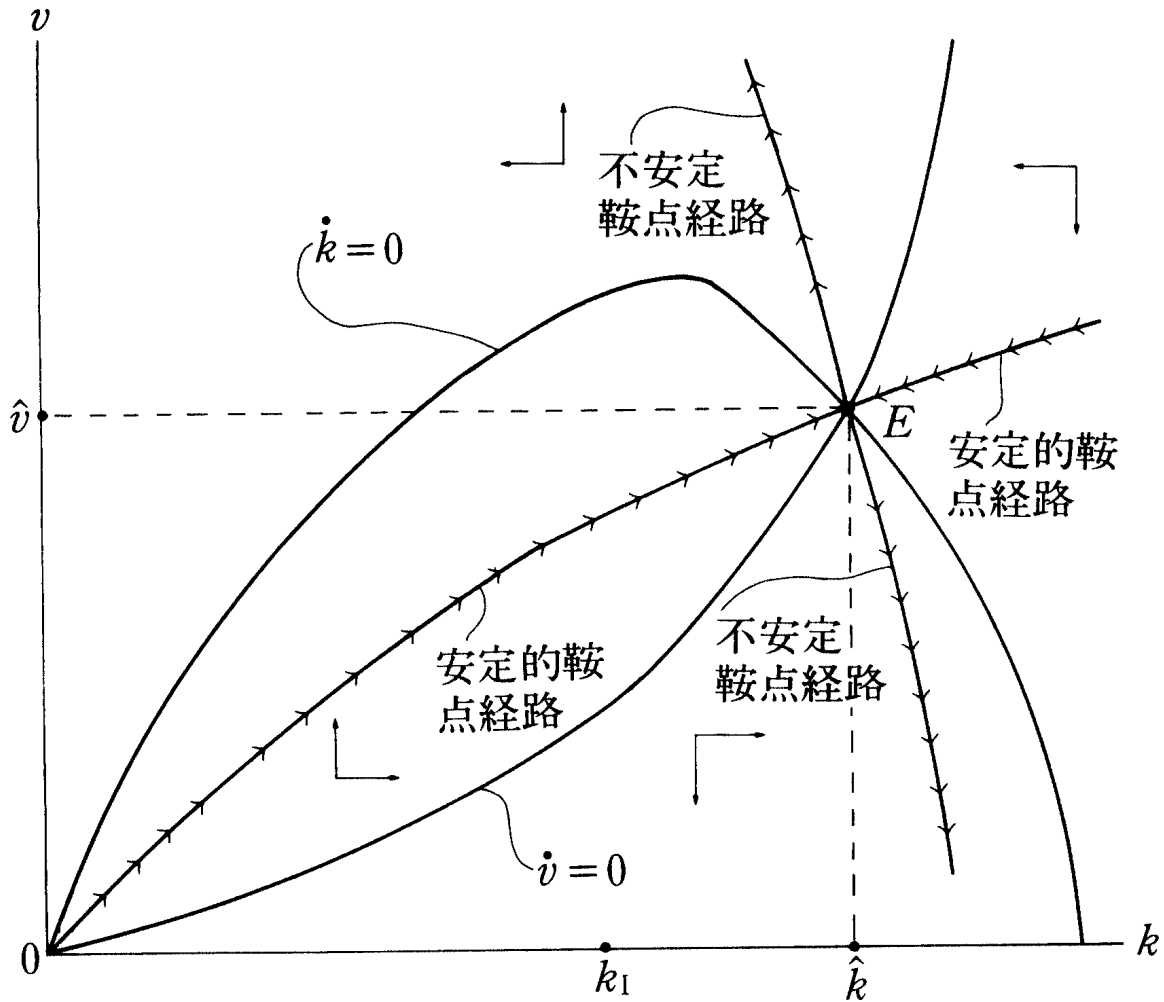
曲線 $\dot{k} = 0$ と曲線 $\dot{v} = 0$ との交点 E は、均衡成長解である。なお、 $(\hat{k}, \hat{v}) = (0, 0)$ も均衡成長解であるが、以下ではこのような解は trivial とし無視する。

鞍点安定性 曲線 $\dot{k} = 0$ の上方の領域では $\dot{k} < 0$, 下方の領域では $\dot{k} > 0$ である。次に曲線 $\dot{v} = 0$ の上方の領域では $\dot{v} > 0$, 下方の領域では $\dot{v} < 0$ となる。これらより、均衡成長点解 E は鞍点となる。

均衡成長解 E に収束する経路、つまり安定的鞍点経路は、一意に存在する。先決変数である k の初期値 k_0 が所与であると、安定的鞍点経路と両

図1 均衡成長の鞍点安定性

($0 < s \leq \alpha < 1$ のケース)



(注) k_1 は $sf_1(k_1, l) = g$ を満たす。

立する非先決変数である効率地価 v の初期値 v_0 は唯一つしかない。しかし、経済にこのユニークな v_0 を必ず選択させるメカニズムは、このモデルにはない。

唯一存在する安定的鞍点経路上に経済がたまたまあり、 (k, v) が (\hat{k}, \hat{v}) に収束していく時、これを鞍点安定性という。

鞍点安定性を、動学体系(6), (7)の線形近似モデルにより検討しよう(付録1を参照)。ここで

$$A_k = s\hat{r} - g + (1 - \alpha) \{f_{21}(\hat{k}, l) - \hat{v}f_{11}(\hat{k}, l)\} l$$

$$= s\hat{r} - g + (1 - \alpha) lB_k$$

$$A_v = -(1 - \alpha) l\hat{r} < 0$$

$$B_k = \hat{v}f_{11}(\hat{k}, l) - f_{21}(\hat{k}, l) < 0$$

$$B_v = \hat{r} - g > 0$$

としよう。ヤコビアン行列

$$\begin{bmatrix} A_k & A_v \\ B_k & B_v \end{bmatrix}$$

の行列式の値を Δ とすると、

$$\Delta = A_k B_v - A_v B_k$$

$$= (s\hat{r} - g)(\hat{r} - g) + (1 - \alpha) glB_k$$

となる。

均衡成長が実現する時

$$\hat{r} > g$$

$$s \leq \alpha \implies s\hat{r} - g < 0$$

であるので、

$$s \leq \alpha \implies \Delta < 0$$

が成立する。

したがって、ヤコビアン行列の特性方程式の二根 λ_1, λ_2 は異符号となり、均衡成長解は鞍点となる。

均衡成長解が鞍点である時、その近傍では、曲線 $\dot{v} = 0$ の傾きは、曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きより大きくなければならない。なぜならば、前者の傾きから後者の傾きを引くと、

$$-\frac{\Delta}{A_v B_v} < 0$$

となるからである。

これまで導かれたいくつかの結果を次の命題として要約しよう。

[命題 2] (均衡成長)

貯蓄率につき $0 < s \leq \alpha < 1$ を仮定すると,

- (1) 均衡成長は動学的に効率的, つまり $r(\hat{k}, l) > g$ である,
 - (2) $sg > g\hat{k}$ が成立し, 資本集約度はソローの土地のないモデルの資本集約度よりも小さい,
 - (3) $sr(\hat{k}, l) < g$ である,
 - (4) 均衡成長は鞍点である,
- が成立する。

3 移行動学

動学体系 (6), (7) を満たす移行経路は, 無数に存在するであろう。これらの移行経路のうち (8) を満たさないものは, 実現不可能な経路として排除される。

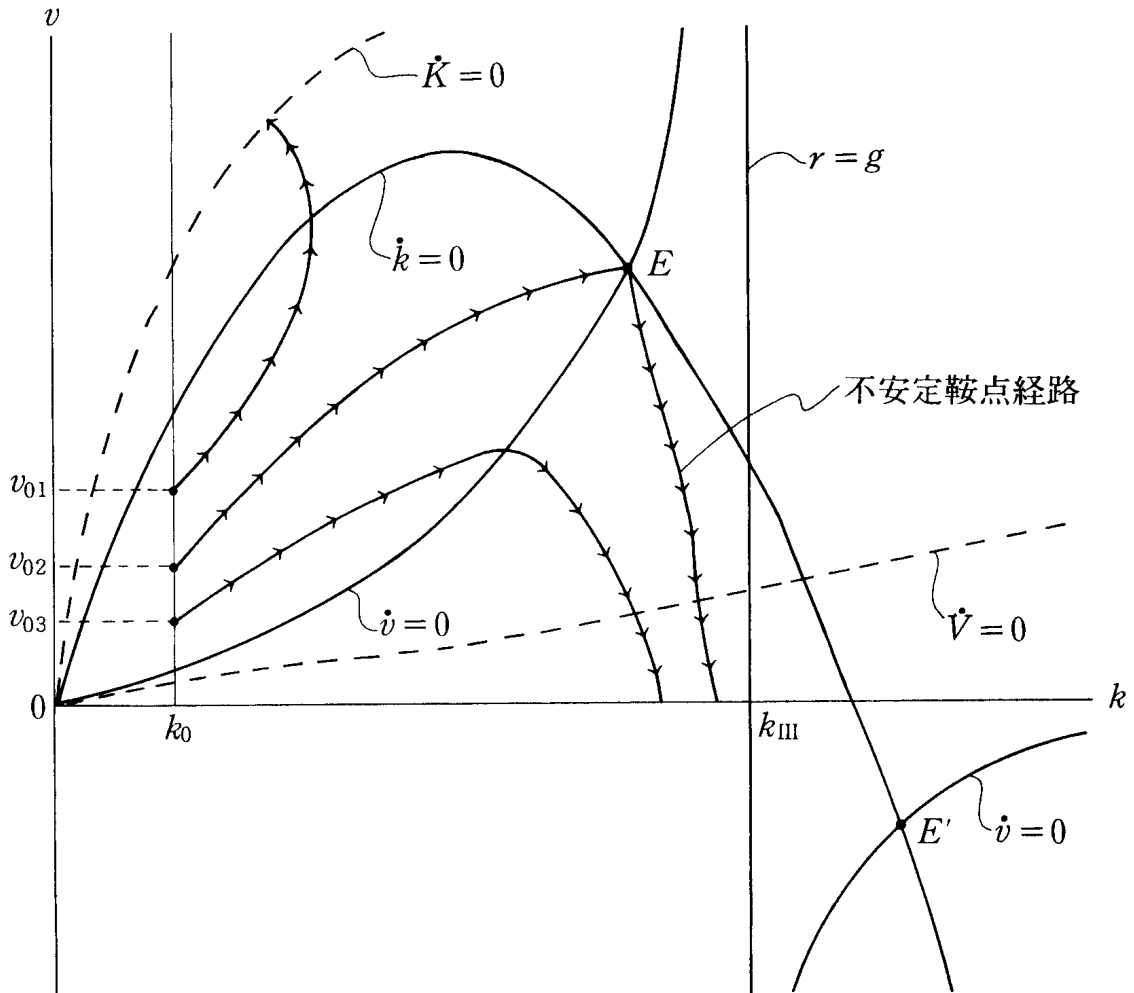
図 2 をみよう。成長均衡解 E に収束する移行経路は, 曲線 OE で示されており, k の初期値は k_0 , そして k_0 の関数として決定される v の初期値は v_{02} である。

実現不可能である移行経路 v_{02} より大きい v の初期値から出発する移行経路上に経済があると, いずれ制約式 (8) を満たさなくなる。たとえば, 図 2 の初期値 (k_0, v_{01}) から出発する移行経路を考えよう。しばらくは k は増加, v は上昇する。この移行経路は, ある特定の時点で曲線 $\dot{k} = 0$ と交わるが, この後は k は減少し続け, v は上昇し続けていく。すると, この移行経路は右上がりの曲線 $\dot{k} = 0$ と特定時点で必ず交わる。この後は, もはやこの移行経路は制約式 (8) を満たさなくなる。

この移行経路は, 有限の時点で v 軸と交わる。このことを示そう。式 (6)

図2 移行動学

($0 < s \leq \alpha < 1$)



を時間 t で微分すると

$$\frac{dk}{dt} = \{sr - g + (1 - \alpha)l(f_{12} - f_{11})\} \dot{k} - (1 - \alpha)lr\dot{v}$$

が求まる。 v 軸に近い十分小さな k について、 $sr - g > 0$ 、 $\dot{k} < 0$ 、 $\dot{v} > 0$ が成立しているので、 $dk/dt < 0$ が成立する。したがって、 (k_0, v_{01}) から出発する移行経路は、有限時点で v 軸と交わる。

このことより、この移行経路は、 v 軸と交わるもっと前の有限時点で曲線 $\dot{K} = 0$ と交わるのである。この意味で、効率地価がいつまでも上昇し続

けることは不可能である。

このように (k_0, v_0) より出発する移行経路は有限時点で制約条件(8)を満たさなくなるので、われわれはこのような移行経路を排除することができる。

効率地価がゼロとなる移行経路 次に、 v_{02} より小さい初期値 v_{03} から出発する移行経路を考えよう。はじめは、 k は増加し続け、 v は上昇し続ける。この移行経路は、特定時点で曲線 $\dot{v} = 0$ と交わる。

この移行経路が直角双曲線 $\dot{v} = 0$ と交わった後の時点で、地価上昇率は必ず正から負に転じる。これを確認しよう。いま

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{v}}{v} + g = r - \frac{q}{v}$$

より、

$$\dot{V} \geq 0 \iff V \geq q/r$$

となる。

$\dot{V} = 0$ を示す曲線 $v = q/r$ は、直角双曲線 $\dot{v} = 0$ 、つまり $v = q/(r-g)$ の必ず下方に位置し、しかもその傾きは正である。この曲線 $\dot{V} = 0$ の上方の領域では $\dot{V} > 0$ 、下方の領域では $\dot{V} < 0$ となる

この曲線 $\dot{V} = 0$ と交わった後にも効率地価 v が下落し続ける時、地価上昇率 (\dot{V}/V) は負となる。

続いて、有限時点で v がゼロとなるかいなかを検討しよう。

均衡成長解 E から発散する不安定鞍点経路が、曲線 $\dot{k} = 0$ の下方と曲線 $\dot{v} = 0$ の下方とで構成される領域にひとつ存在する。この不安定鞍点経路は、直角双曲線 $\dot{v} = 0$ の漸近線 $r = g$ とは交わらない。この理由は、**図2**の v が負である領域に描かれているもうひとつの仮想の直角双曲線（これは第I象限の直角双曲線 $\dot{v} = 0$ と対称になるが縮小して描かれている）と、この不安定鞍点経路は交わってはいけないからである。

移行経路は、互いに交わらないので、初期値 (k_0, v_0) から出発する移行経路は、不安定鞍点経路の左側の領域で $v = 0$ となる。 $r = g$ を満たす k を k_{III} としよう。すると (7) より

$$\frac{dv}{dt} = (vf_{11} - f_{12})\dot{k} + (r - g)v$$

となるが、右辺第1項は $\dot{k} > 0$ であるので負となる。 $v < 0$ であり、 $k < k_{\text{III}}$ の時 $r > g$ であるので、右辺第2項も負となる。したがって、 $dv/dt < 0$ となるので、有限時点で $v = 0$ となる。

効率地価 $v = 0$ は、資産市場の均衡条件 (3) と両立する。この均衡条件 (3) と (4) より、地価 V は、

$$V = \frac{Q + \dot{V}}{r}$$

となり、 $v = V = 0$ より $Q = -\dot{V}$ が成立する。プラスの地代のもとでは、地価下落率は生産要素としての土地の収益率 Q/V に等しくなる。

これまでの考察より、(6), (7), (8) を同時に満たす移行経路は、 v の初期値が v_{02} と v_{02} より小さいものにと限定される。

4 $\alpha \geq s$ である他のケース

これまでは、 $0 < s \leq \alpha < 1$ のケースを分析してきた。ここで、キャピタル・ゲイン所得からの貯蓄率 α は要素所得からの貯蓄率 s を下回ることはない ($\alpha < s$ のケースは次節で展開する) が、 $0 < s < \alpha = 1$ であるケースと $0 = s < \alpha < 1$ であるケースの二つを分析しよう。

ケース I : $0 < s < \alpha = 1$ 土地からのキャピタル・ゲイン所得が全て貯蓄される時には、動学体系は

$$\dot{k} = sy - gk \tag{12}$$

$$\dot{v} = (r - g)v - q \tag{7}$$

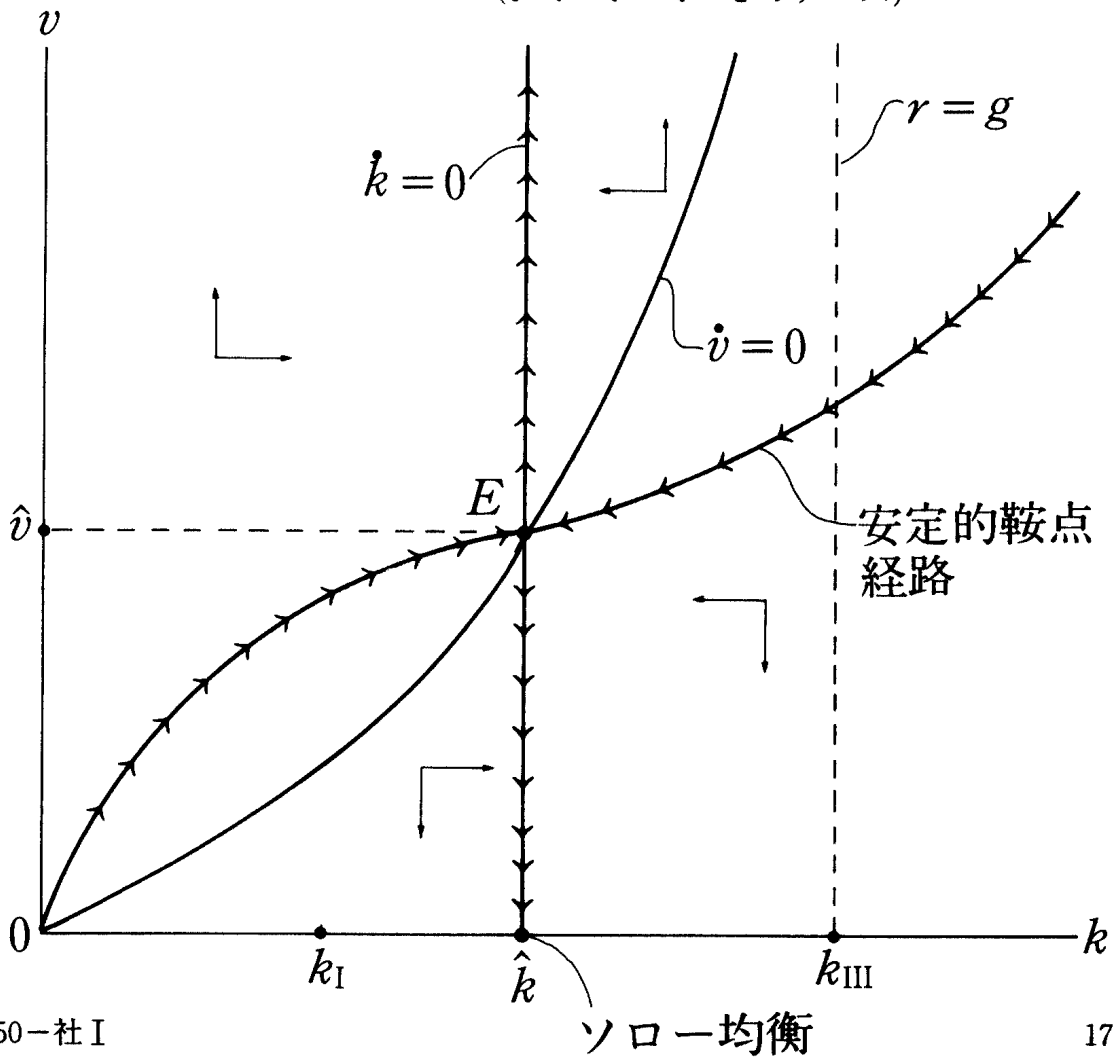
となる。

$\dot{k} = 0$ である (k, v) の組合せは、垂直線上にある。この時、 $sy = gk$ が成立する。土地がある時とない時とのソローの成長モデルにおける k の均衡成長解は、存在するならば同一となる。点 $(\hat{k}, 0)$ 、つまり土地が存在しない時のソロー均衡が動学的に非効率的($f_1(\hat{k}, 1) < g$)である($\dot{k} = 0$ を示す垂直線が垂直線 $r = g$ の右側に位置する)ならば、土地が存在する時の均衡成長は存在しない(図3)。

動学的に効率的である均衡成長解は、 $r < y/\hat{k} = g/s$ より $sf < g$ を満たす。さらに、資本の所得分配率 rk/y を θ_1 とすると、

図3 均衡成長

($0 < s < \alpha \leq 1$ のケース)



$$\hat{r} - g = (\hat{\theta}_1 - s)g/s > 0$$

より、 $\hat{\theta}_1 > s$ となる。

均衡成長は、やはり鞍点である。なぜならば、 $\alpha = 1$ であると $A_v = 0$ であり、均衡成長解の近傍で

$$\Delta = (s\hat{r} - g)(\hat{r} - g) < 0$$

が成立するからである。特性根は、 $\hat{r} - g > 0$ 、 $s\hat{r} - g < 0$ と求まる。

\hat{k} と \hat{v} に関する比較動学の結果を示しておこう。

均衡成長経路では

$$s\hat{y} = g\hat{k}, \quad \hat{v}l = \frac{\hat{k}\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1 - s}$$

が成立する。

したがって $\hat{\theta}_3 = 1 - (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{k}}{\partial s} \frac{s}{\hat{k}} &= \frac{1}{1 - \hat{\theta}_1} > 1 \\ 0 < \frac{\partial \hat{k}}{\partial l} \frac{l}{\hat{k}} &= \frac{\hat{\theta}_2}{1 - \hat{\theta}_1} = 1 - \frac{\hat{\theta}_3}{1 - \hat{\theta}_1} < 1 \\ \frac{\partial \hat{k}}{\partial g} \frac{g}{\hat{k}} &= -\frac{1}{1 - \hat{\theta}_1} < -1 \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{s}{\hat{v}} &= \frac{(1-s)\hat{\theta}_1}{(1-\hat{\theta}_1)(\hat{\theta}_1-s)} > 1 \\ -1 < \frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \frac{l}{\hat{v}} &= -\frac{\hat{\theta}_3}{1-\hat{\theta}_1} = -\left(1 - \frac{\hat{\theta}_2}{1-\hat{\theta}_1}\right) < 0 \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial g} \frac{g}{\hat{v}} &= \frac{\partial \hat{k}}{\partial g} \frac{g}{\hat{k}} < -\frac{1}{1-\hat{\theta}_1} < -1 \end{aligned}$$

を導出できる。

生産関数がコブ・ダグラス型である時は、

$$\hat{\theta}_1 = a, \quad \hat{\theta}_2 = b, \quad \hat{\theta}_3 = 1 - (a + b)$$

とすればよい。

効率地価につき

$$\hat{v} = \frac{\hat{q}}{\hat{r} - g} = \frac{s\hat{q}}{(\hat{\theta}_1 - s)g}$$

より

$$\frac{\hat{v}l}{\hat{q}} = \frac{s\hat{\theta}_2}{(\hat{\theta}_1 - s)g}$$

$$\frac{\hat{v}l}{\hat{k}} = \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1 - s}$$

が成立する。

ケースⅡ： $s = 0$, $0 < \alpha \leq 1$ 要素所得 Y からの貯蓄が全くなされない
ケースでは

$$\dot{k} = (1 - \alpha)ql - gk - (1 - \alpha)rvl$$

$$\dot{v} = (r - g)v - q$$

である。

容易に確認できるように、 $\dot{k} = 0$, $\dot{v} = 0$ を満たす正の解は存在しない。

図4をみよう。曲線 $\dot{v} = 0$ と曲線 $\dot{k} = 0$ の式は、それぞれ

$$v = \frac{q}{r - g}$$

$$v = \frac{q}{r}$$

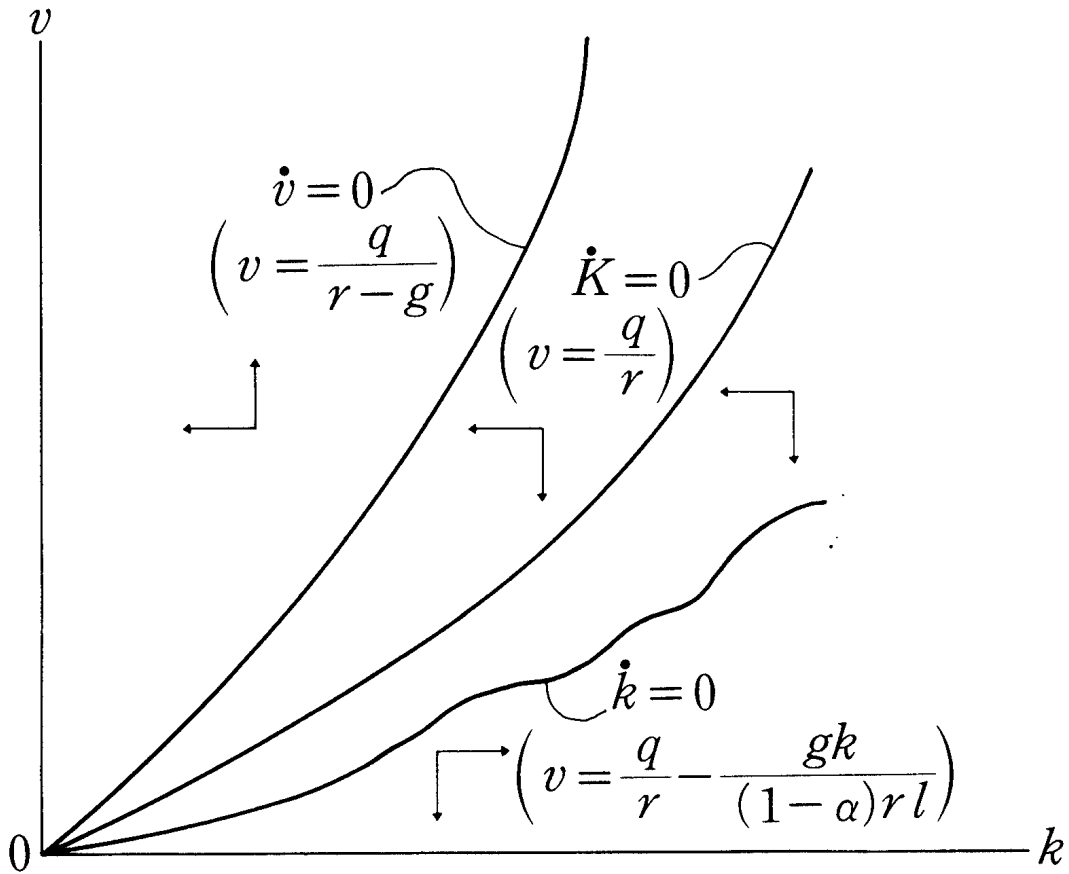
である。したがって所与の k につき曲線 $\dot{v} = 0$ は、曲線 $\dot{k} = 0$ の上方に位置する。

次に曲線 $\dot{k} = 0$ は、 $\alpha \neq 1$ の時には必ずしも領域($k > 0, v > 0$)に位置しない。領域($k > 0, v < 0$)に位置する可能性も多いにある。

いずれにしろ、曲線 $\dot{k} = 0$ は、曲線 $\dot{K} = 0$ の下方に位置する。したがって、正の (\hat{k}, \hat{v}) は存在し得ない。

図4 正の均衡成長解の非存在性

($0 = s < \alpha < 1$ のケース)



なお、 $\alpha = 1$ であると

$$\dot{k} = -gk \leq 0$$

となり、trivialな均衡成長解 $(0,0)$ のみが存在し、正の解はやはり存在しない。

5 複数均衡成長と大域的鞍点安定性

これまでは $s \leq \alpha$ を仮定したが、ここで要素所得からの貯蓄率 s がキャピタル・ゲイン所得からの貯蓄率 α を上回るケース、つまり $0 \leq \alpha < s \leq 1$

であるケースにつき均衡成長の一意性と安定性を考察する。

複数均衡成長とその安定性 このケースでは、均衡成長の一意性は得られない。複数の均衡成長解のうち $\hat{k} > k_1$ (つまり $sr < g$ を満たす \hat{k}) を満たすものは、 $\Delta < 0$ であるので局所的に鞍点となる。したがって $\hat{k} > k_1$ については、均衡成長解は一意である。

次に、均衡成長解が $\hat{k} < k_1$ (つまり $sr > g$ が成立する) を満たすケースを考えよう。ヤコビアン行列の対角和(Trace)とその行列式の値 Δ について

$$\text{Trace} = A_k - B_v = s\hat{r} - g - (1 - \alpha)lB_k + \hat{r} - g > 0$$

$$\Delta \cong 0$$

となる。したがって、特性方程式の二つの実根 λ_1, λ_2 について、次の三つのケース

- (イ) 二根共に正 ($\Delta > 0$)
- (ロ) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ($\Delta = 0$)
- (ハ) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > |\lambda_1| > 0$ ($\Delta < 0$)

が考えられる。

ケース(イ), (ロ)では、均衡成長は局所的に不安定である。ケース(イ)では、曲線 $\dot{k} = 0$ の正の傾きは、曲線 $\dot{v} = 0$ の正の傾きよりも局所的に大きくなる。ケース(ロ)では、両曲線は接している。

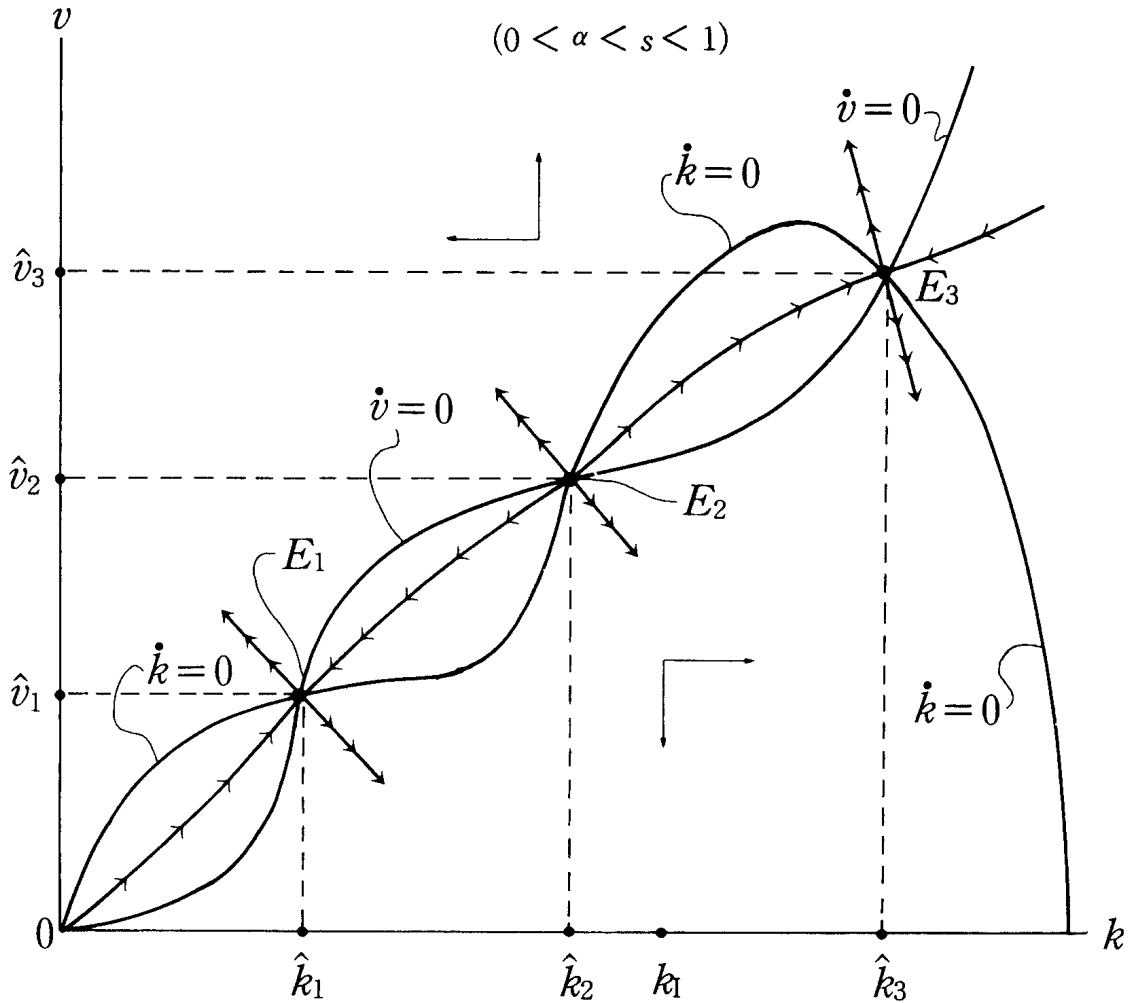
ケース(ハ)では、均衡成長は局所的鞍点となり、曲線 $\dot{v} = 0$ の正の傾きは曲線 $\dot{k} = 0$ の正の傾きよりも局所的に大きくなる。

いずれにしろ $\hat{k} < k_1$ の場合には、対角和は正となるので、均衡成長の局所的安定性は成立しない。

大域的鞍点安定性 鞍点均衡成長解が複数存在する時、任意の k_0 に対し、いずれかの鞍点均衡成長解に収束する移行経路が唯ひとつ存在するなら、これを大域的鞍点安定性よぶことにしよう。

この大域的鞍点安定性を満たすひとつの例が、**図5**に示されている。こ

図5 大域的鞍点安定性



のケースでは、原点において、曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きは、 $\dot{v} = 0$ の傾きよりも大きいことに注意すべきである。

三つの均衡成長解のうち、 $E_1(\hat{k}_1, \hat{v}_1)$ と $E_3(\hat{k}_3, \hat{v}_3)$ とは鞍点であり、 $E_2(\hat{k}_2, \hat{v}_2)$ は不安定均衡成長解である。 $k_0 < \hat{k}_2$ である時、経済は安定的鞍点経路に沿って鞍点 E_1 に収束し、**貧困のワナ**に陥いる。もし $k_0 > \hat{k}_2$ であると、経済は鞍点 E_3 に収束する。

図6は、原点において、曲線 $\dot{v} = 0$ の傾きが曲線 $\dot{k} = 0$ の傾きよりも大きく、偶数の均衡成長解が存在するケースを示す。この図では、均衡成長解は二つ存在する。

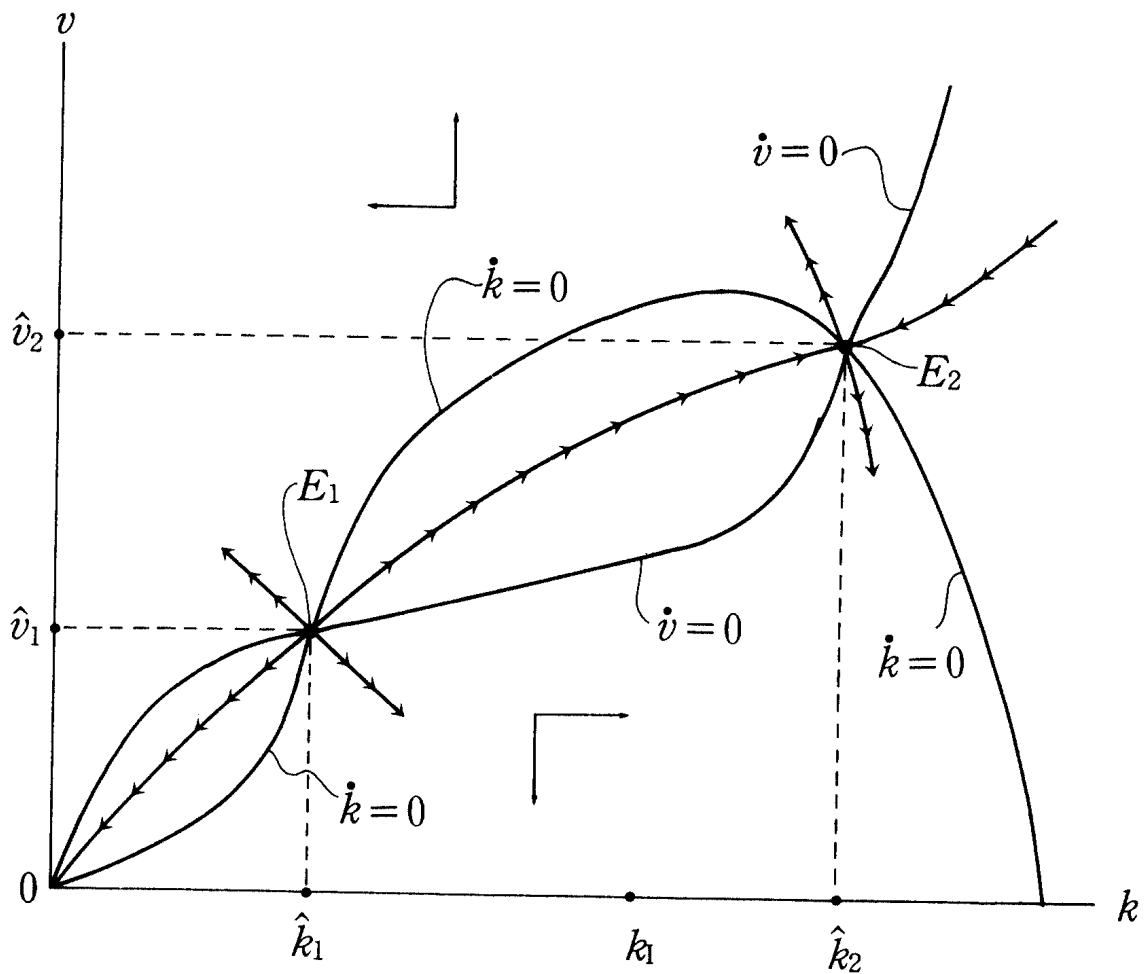
点 $E_1(\hat{k}_1, \hat{v}_1)$ は局所的に不安定であり、点 $E_2(\hat{k}_2, \hat{v}_2)$ は鞍点である。 $k_0 > \hat{k}_1$ で

あると、経済は安定的鞍点経路に沿って鞍点 E_2 に収束する。しかし、 $k_0 < \hat{k}_1$ であると、経済は不安定的鞍点経路に沿って点 E_1 から発散し k はゼロに収束する。

したがって、安定的鞍点経路上の任意の初期値 k_0 から出発する経済が、いずれかの均衡成長解へ収束するとはいえない。

図6 大域的鞍点安定的でないケース

($0 < \alpha < s < 1$)



6 局所的収束スピード

動学体系 (6), (7) の線形近似は、付録1 でなされている。

安定的鞍点経路に沿って鞍点 (\hat{k}, \hat{v}) に収束する (k, v) は

$$\dot{k} = \lambda_1 (k - \hat{k}) \tag{13}$$

$$\dot{v} = \lambda_1(v - \hat{v}) \quad (14)$$

を満たす。

線形動学体系(13), (14)における収束スピードを, 局所的収束スピードとよぼう。 k と v の収束スピードは, それぞれ $-\lambda_1$ である。すると, λ_1 はパラメーター (s, l, g) に依存するので, パラメーターの変化により均衡成長への収束スピードがいかに変化するかを知ることができる。

しかし, $0 < s \leq \alpha < 1$ のケースにおいてこれを確認するのは非常に困難である。なぜならば, 生産関数の三階の偏導関数の符号を確定せねばならないからである。したがって, 比較的容易なケース ($0 < s < \alpha = 1$)につき, 収束スピードの比較動学をする。

6-1 局所的収束スピード

局所的収束スピードは

$$-\frac{dk}{k} \equiv \beta(k), \quad -\frac{dv}{v} \equiv \beta(v)$$

で定義される。

いま $s\hat{y} = g\hat{k}$ であるので

$$\lambda_1 = s\hat{r} - g = (\hat{\theta}_1 - 1)g < 0$$

が成立する。よって(13), (14)より

$$\beta(k) = \beta(v) = -\lambda_1 = (1 - \hat{\theta}_1)g$$

が導かれ, さらに $0 < \beta(k) < g$ となる。

y の収束スピード $\beta(y)$ を求めよう。生産関数の均衡成長解の近傍での線形化より

$$y - \hat{y} = f_1(\hat{k}, l)(k - \hat{k})$$

となる。したがって

$$\dot{y} = f_1(\hat{k}, l)\dot{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 f_1(\hat{k}, l) (k - \hat{k}) \\
&= \lambda_1 (y - \hat{y})
\end{aligned}$$

であり,

$$\beta(y) = - \frac{d\hat{y}}{dy} = - \lambda_1$$

が求まる。よって

$$\beta(y) = \beta(k) = \beta(v) = - \lambda_1$$

が成立する。

局所的収束スピード $\beta(k)$ の比較動学の結果は,

$$1 > \frac{\partial \beta(k)}{\partial s} \frac{s}{\beta(k)} = \frac{\hat{\theta}_1}{(1 - \hat{\theta}_1)^2} \{(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 - 1\} \cong 0 \Leftrightarrow (1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 \cong 1$$

$$\frac{\partial \beta(k)}{\partial l} \frac{l}{\beta(k)} = \frac{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3}{(1 - \hat{\theta}_1)^2} (\sigma_{13} - \sigma_{12}) \cong 0 \Leftrightarrow \sigma_{13} \cong \sigma_{12}$$

$$\frac{\partial \beta(k)}{\partial g} \frac{g}{\beta(k)} = 1 - \frac{\hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_1} \{(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 - 1\}$$

となる。ここで

$$\hat{\theta}_3 = 1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \quad (\text{労働の所得分配率})$$

$$\sigma_{11} = \hat{y} f_{11}(\hat{k}, l) / f_1(\hat{k}, l)^2$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \hat{y} f_{ij}(\hat{k}, l) / f_i(\hat{k}, l) f_j(\hat{k}, l) \quad (\text{生産要素 } i \text{ と } j \text{ との補完の偏弾力性})$$

である(付録2を参照)。

$\beta(k)$ の s についての偏弾力性は、必ず 1 より小さい。貯蓄率 s の上昇が $\beta(k)$ を減速(加速)させるための必要十分条件は、 $(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 < (>) 1$ である。あるいは、貯蓄率 s の大きい国・地域の収束スピードが、 s の小さい国・地域の収束スピードより遅い(早い)ための必要十分条件は、 $(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 < (>) 1$ である。

$\partial \beta(k) / \partial s < (>) 0$ が成立するための十分条件として、 $\sigma_{12} < (>) 1$,

$\sigma_{13} < (>) 1$ があげられる (付録 2 の図 A 2 を参照)。

労働に比べ土地が多い国・地域ほど収束スピードが早く (遅く) なるための必要十分条件は, $\sigma_{13} > (<) \sigma_{12}$ である。

g が $\beta(k)$ に及ぼす効果をみよう。まず

$$\frac{\partial \beta(k)}{\partial g} \frac{g}{\beta(k)} = 1 + \hat{\theta}_1 + \frac{\sigma_{11} \hat{\theta}_1^2}{1 - \hat{\theta}_1} < 1 + \theta_1$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta(k)}{\partial g} \frac{g}{\beta(k)} &= - \frac{\hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_1} \left\{ \sigma_{12} \hat{\theta}_2 + \sigma_{13} \hat{\theta}_3 - \frac{(1 + \hat{\theta}_1)(\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3)}{\hat{\theta}_1} \right\} \\ &\equiv - \frac{\hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_1} J \end{aligned}$$

が導かれる。

図 7 をみよう。直線 $J = 0$ は, 直線 $(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 = 1$ の上方に位置する。直線 $J = 0$ の下方の領域では, $J < 0$ であり,

$$0 < \frac{\partial \beta(k)}{\partial g} \frac{g}{\beta(k)} < 1 + \hat{\theta}_1$$

が成立する。たとえば, $J < 0$ の十分条件として

$$\textcircled{1} \sigma_{12}, \sigma_{13} < 1 + (1/\hat{\theta}_1), \textcircled{2} \sigma_{12}, \sigma_{13} \leq 1$$

をあげることができる。

直線 $J = 0$ の上方の領域では, $J > 0$ であり, $\partial \beta(k) / \partial g < 0$ となる。

$J > 0$ の十分条件として

$$\sigma_{12}, \sigma_{13} > 1 + (1/\hat{\theta}_1) > 2$$

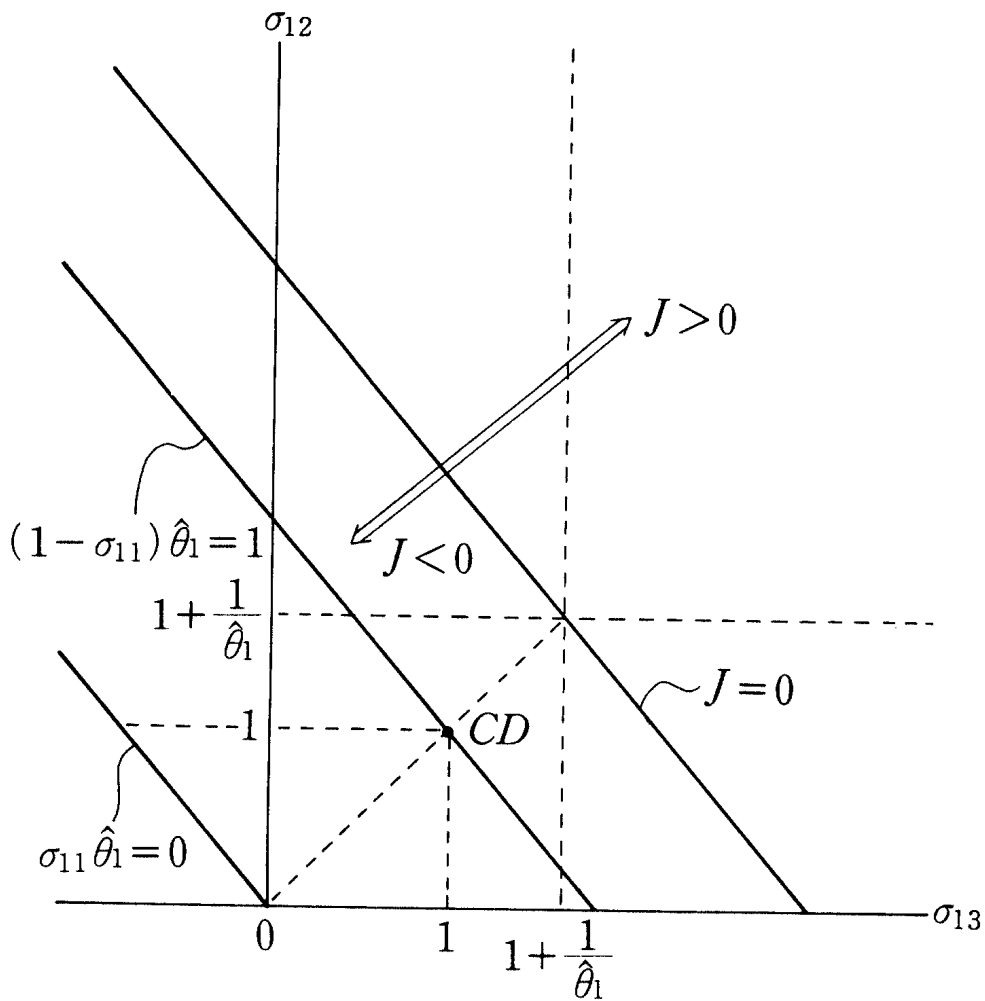
をあげることができる。

コブ・ダグラス型生産関数 このケースでは

$$\beta(k) = (1 - a)g$$

となり, まず

図7 $\partial\beta(k)/\partial g$ の正負



(注) ① $J = \sigma_{12} \hat{\theta}_2 + \sigma_{13} \hat{\theta}_3 - \frac{(1 + \hat{\theta}_1)(\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3)}{\hat{\theta}_1}$

② $J > (<) 0$ であると $\frac{\partial\beta(k)}{\partial g} < (>) 0$

③ $J = 0$ であると $\frac{\partial\beta(k)}{\partial g} = 0$

$$\frac{\partial\beta(k)}{\partial s} = \frac{\partial\beta(k)}{\partial l} = 0$$

$$\frac{\partial\beta(k)}{\partial g} \frac{g}{\beta(k)} = 1$$

を得る。

$\beta(k)$ は、 s と l には依存しない。さらに興味深いのは $\beta(k)$ が資本の所得分配率 a に依存することであり、

$$0 > \frac{\partial \beta(k)}{\partial a} \frac{a}{\beta(k)} \cong -1 \iff a \cong \frac{1}{2}$$

が成立する。資本分配率は、現実には3割台といわれる。これが妥当する時、資本分配率の高い国・地域では、それが低い国・地域よりも、収束スピード $\beta(k)$ は遅い。さらに同一の国・地域において、資本分配率の上昇は、あまり収束スピードを減速させない。

また $1-a$ は土地分配率と労働分配率との和であるので、これら二つの分配率の和が1%上昇すると、収束スピード $\beta(k)$ もまた1%加速する。

6-2 局所的成長率

$0 < s < \alpha = 1$ のケースの線形近似体系において、安定的鞍点経路上にある (k, v) について、 k の成長率 $G(k)$ 、 v の上昇率 $G(v)$ は、それぞれ

$$G(k) = (1 - \hat{\theta}_1) g \frac{(\hat{k} - k)}{k} \cong 0 \iff k \cong \hat{k}$$

$$G(v) = (1 - \hat{\theta}_1) g \frac{(\hat{v} - v)}{v} \cong 0 \iff v \cong \hat{v}$$

と具体的に求まる。 $G(k)$ 、 $G(v)$ は、それぞれ k 、 v の単調減少関数であり、さらに

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(k) = \lim_{v \rightarrow \infty} G(v) = \lambda_1 = -(1 - \hat{\theta}_1) g$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \lim_{v \rightarrow 0} G(v) = \infty$$

となる。

非先決変数である効率地価の初期値 v_0 は、

$$v_0 = \hat{v} + \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} (k_0 - \hat{k})$$

$$= \hat{v} - \frac{B_k}{(1-s)\hat{r}}(k_0 - \hat{k})$$

と、先決変数 k の初期値 k_0 により決定される。他の条件が同一であると、初期値 $v_0 < \hat{v}$ につき、初期値 v_0 が小さい国・地域ほど、効率地価の上昇率は高い、という効率地価に関する絶対的収束性が導かれる。

$G(v)$ のシフト： $v < \hat{v}$ である時 パラメーター s, l, g の変化により曲線 $G(v)$ が上にシフトするのか、あるいは下にシフトするのかを調べよう。

$v < \hat{v}$ につき

$$\frac{\partial G(v)}{\partial s} \frac{s}{G(v)} = -\frac{\hat{k} \hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_1} \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial s} \frac{s}{\hat{k}} \right) + \frac{\hat{v}}{\hat{v} - v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{s}{\hat{v}} \right) > 0$$

if $(1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(v)}{\partial l} \frac{l}{G(v)} &= -\frac{1}{1 - \hat{\theta}_1} \left\{ \hat{k} \hat{\theta}_1 \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial l} \frac{l}{\hat{k}} \right) + l \hat{\theta}_{12} \right\} + \frac{\hat{v}}{\hat{v} - v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \frac{l}{\hat{v}} \right) \\ &= -\frac{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3}{(1 - \hat{\theta}_1)^2} (\sigma_{12} - \sigma_{13}) + \frac{\hat{v}}{\hat{v} - v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \frac{l}{\hat{v}} \right) < 0 \end{aligned}$$

if $\sigma_{12} \geq \sigma_{13}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(v)}{\partial g} \frac{g}{G(v)} &= -\frac{\hat{k} \hat{\theta}_1}{1 - \hat{\theta}_1} \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial g} \frac{g}{\hat{k}} \right) + 1 + \frac{\hat{v}}{\hat{v} - v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial g} \frac{g}{\hat{v}} \right) \\ &= \frac{1}{(1 - \hat{\theta}_1)^2} (1 - \hat{\theta}_1 - \sigma_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - \sigma_{13} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_3) \\ &\quad + \frac{\hat{v}}{\hat{v} - v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial g} \frac{g}{\hat{v}} \right) \end{aligned}$$

を得る。

たとえば $\sigma_{12}, \sigma_{13} \geq 1$ である（**図A2**を参照）と、貯蓄率の上昇により曲線 $G(v)$ は上方シフトする。

そして $\sigma_{12} \geq \sigma_{13}$ であると、 l の増加により $G(v)$ は、下方シフトする。

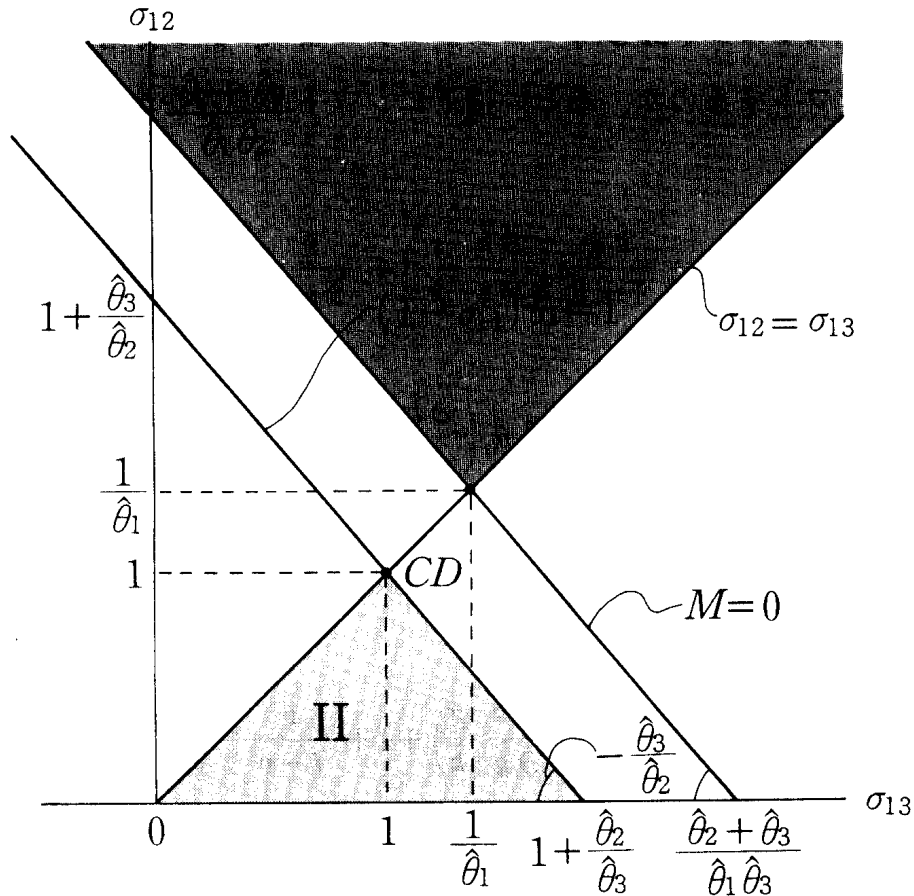
g が $G(v)$ に及ぼす効果については、

$$M \equiv 1 - \hat{\theta}_1 - \sigma_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - \sigma_{13} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_3 \leq 0$$

であると $\partial G(v)/\partial g < 0$ となり、曲線 $G(v)$ は下方シフトする。

図 8 をみよう。右下りの直線 $M=0$ 上、あるいは上方の領域では $\partial G(v)/\partial g < 0$ が成立する。右下りの直線 $(1-\sigma_{11})\hat{\theta}_1=0$ 上、あるいは上

図 8 $G(v)$ 曲線のシフトの方向



- (注) ① $M = 1 - \hat{\theta}_1 - \sigma_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - \sigma_{13} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_3$
 ② 領域 I $\{ \sigma_{13}, \sigma_{12} \mid \sigma_{12} \geq \sigma_{13}, M \geq 0 \}$
 領域 II $\{ \sigma_{13}, \sigma_{12} \mid \sigma_{12} \leq \sigma_{13}, (1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 \leq 1 \}$

方の領域では $\partial G(v)/\partial s > 0$, そして原点を通る45°線上, あるいは上方の領域では $\partial G(v)/\partial l < 0$ となる。

これら三つの領域の共通集合 $\{\sigma_{13}, \sigma_{12} \mid \sigma_{12} \geq \sigma_{13}, M \geq 0\}$ は, 図8で領域Iと記されている。この共通集合領域Iにおいては, あるいはひとつの十分条件として

$$\sigma_{12} \geq \sigma_{13} \geq \frac{1}{\hat{\theta}_1} > 1$$

である時,

$$\frac{\partial G(v)}{\partial s} > 0, \quad \frac{\partial G(v)}{\partial l} < 0, \quad \frac{\partial G(v)}{\partial g} < 0$$

となる。つまり s の上昇, l の下落, あるいは g の下落により, 曲線 $G(v)$ は上方にシフトし, 所与の $v < \hat{v}$ につき v の上昇率は高まる。つまり, 同一の初期値 v_0 をもつ国・地域について, 貯蓄率 s が大きい, 労働量に比べ土地賦存量が少ない, 技術進歩率 g が小さい国・地域のほうが効率地価の上昇率は高くなるのである。

$G(v)$ のシフト: $v > \hat{v}$ である時 このケースでは,

$$G(v) = -(1 - \hat{\theta}_1) g \frac{(v - \hat{v})}{v} < 0$$

である。ここで

$$h \equiv (1 - \hat{\theta}_1) g \frac{(v - \hat{v})}{v}$$

としよう。すると

$$\frac{\partial h}{\partial s} \frac{s}{h} = \frac{\hat{k} \hat{\theta}_{11}}{1 - \hat{\theta}_1} \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial s} \frac{s}{\hat{k}} \right) - \frac{\hat{v}}{v - \hat{v}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{s}{\hat{v}} \right) < 0 \text{ if } (1 - \sigma_{11}) \hat{\theta}_1 \leq 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial l} \frac{l}{h} &= - \frac{1}{1 - \hat{\theta}_1} \left\{ \hat{k} \hat{\theta}_{11} \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial l} \frac{l}{\hat{k}} \right) + l \hat{\theta}_{12} \right\} - \frac{\hat{v}}{v - \hat{v}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \frac{l}{\hat{v}} \right) \\ &= - \frac{\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3}{(1 - \hat{\theta}_1)^2} (\sigma_{12} - \sigma_{13}) - \frac{\hat{v}}{v - \hat{v}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial l} \frac{l}{\hat{v}} \right) > 0 \text{ if } \sigma_{12} \leq \sigma_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial g} \frac{g}{h} &= -\frac{\hat{k} \hat{\theta}_1}{1-\hat{\theta}_1} \left(\frac{\partial \hat{k}}{\partial g} \frac{g}{\hat{k}} \right) + 1 - \frac{\hat{v}}{\hat{v}-v} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial g} \frac{g}{\hat{v}} \right) \\ &= \frac{M}{(1-\hat{\theta}_1)^2} - \frac{\hat{v}}{v-\hat{v}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial g} \frac{g}{\hat{v}} \right) > 0 \quad \text{if } M \geq 0 \end{aligned}$$

が求まる。

ふたたび図8をみよう。領域IIを $\{\sigma_{13}, \sigma_{12} \mid \sigma_{12} \leq \sigma_{13}, (1-\sigma_{11})\hat{\theta}_1 \leq 1\}$ と定義する。この領域IIにおいては、あるいはその部分集合 $\{\sigma_{13}, \sigma_{12} \mid \sigma_{12} \leq \sigma_{13} \leq 1\}$ においては、 s の上昇、 l の減少あるいは g の下落により、曲線 $G(v)$ は上方にシフトする。

これまでの議論は、図9に示されている。図9の(1)は $\sigma_{12} \geq \sigma_{13} \geq 1/\hat{\theta}_1$ のケースに、(2)は $\sigma_{12} \leq \sigma_{13} \leq 1$ のケースに、それぞれ対応する。たとえば貯蓄率 s が上昇するとしよう。均衡成長値は \hat{v} から \hat{v}' へ上昇し、漸近線 $-(1-\hat{\theta}_1)g$ は下方にシフトし、 $-(1-\hat{\theta}_1')g$ となる。 $v < \hat{v}'$ については、曲線 $G(v)$ は上方にシフトする。 $v > \hat{v}'$ については、 v が上昇するにつれ、いずれ新しい曲線 $G(v)$ はもとの曲線 G の下方に位置することになる。

ケース(2)については、 $v > \hat{v}'$ については新しい曲線 $G(v)$ はもとの曲線よりも上方に位置する。 $v < \hat{v}'$ については、 v が次第に低下するにつれ、新旧の曲線 $G(v)$ は交わり、いずれ新しい曲線 $G(v)$ はもとの曲線の下方に位置することになる。

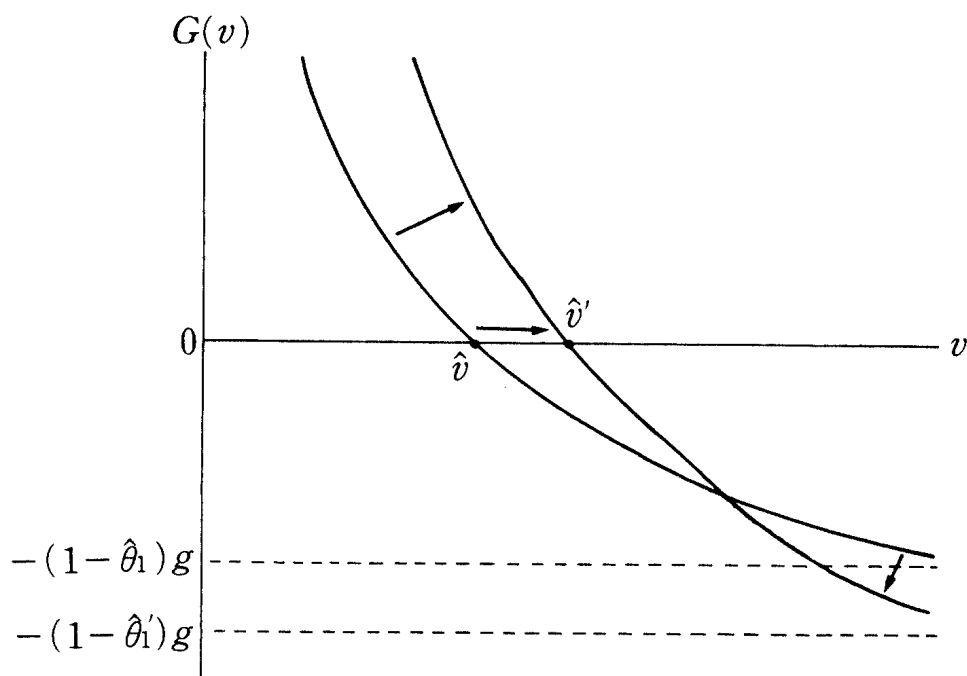
7 グローバルな収束スピード

7-1 グローバルな収束スピード

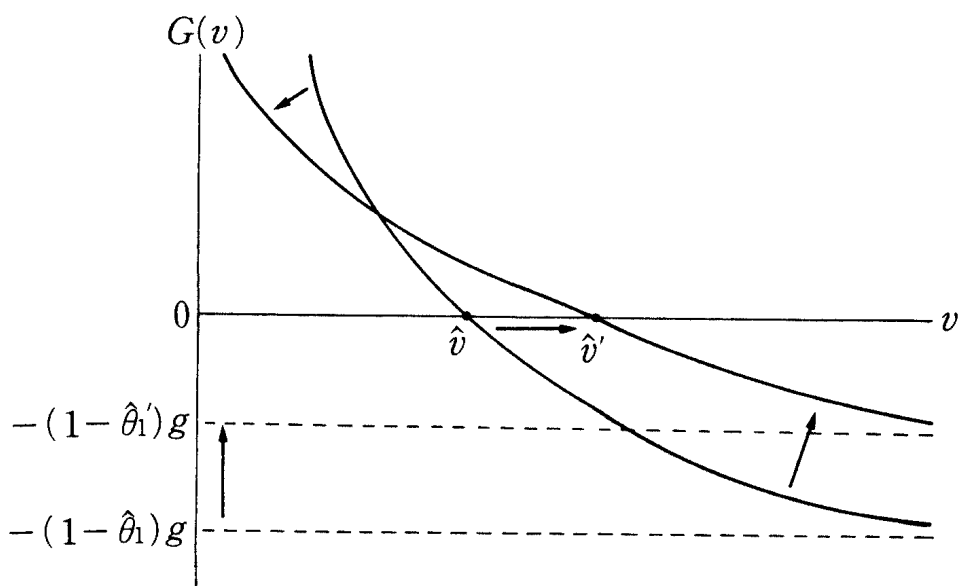
$\alpha = 1$ のケースにつき、線形近似動学体系の収束スピードにつき検討した。今度は、 $\alpha = 1$ のケースにつき生産関数をコブ・ダグラス型であると仮定すると、動学体系を線形近似しなくても収束スピードを求めることができることを示そう。ここでのケースの k 、 y の収束スピードをの $\alpha(k)$ 、 $\alpha(y)$ と記すことにする。 $\alpha(k)$ 、 $\alpha(y)$ は、グローバルな収束スピード概念

図9 $G(v)$ 曲線のシフト

(1) $\sigma_{13} \geq \sigma_{12} \geq \frac{1}{\hat{\theta}_1'}$



(2) $\sigma_{12} \leq \sigma_{13} \leq 1$



である。これに対して $\beta(k)$, $\beta(y)$ は、ローカルな尺度である。

k^{1-a} のグローバルな収束スピード コブ・ダグラス型生産関数のもとでは、(12) より

$$\dot{k}k^{-a} = sl^b - gk^{1-a} \quad (15)$$

が導かれる。ここで、 $x = k^{1-a}$ とすると (15) は、

$$\dot{x} + (1-a)gx = (1-a)sl^b$$

となる。この微分方程式の一般解は、

$$x = \frac{sl^b}{g} + C \exp \{-(1-a)gt\}$$

である。ここで C は任意定数。初期値につき

$$x_0 = \frac{sl^b}{g} + C$$

であるので

$$x = \hat{x} + (x_0 - \hat{x}) \exp \{-(1-a)gt\} \quad (16)$$

$$\hat{x} = sl^b/g$$

を得る。

ここで (16) を微分すると

$$\dot{x} = (1-a)g(\hat{x} - x)$$

であるので、 x とその均衡成長解 \hat{x} とのギャップは、 $(1-a)g$ の率で着実に埋められることがわかる。したがって、 x の収束スピードは、

$$-\frac{d\hat{x}}{dx} = (1-a)g > 0$$

と一定となる。

$\alpha(k)$ の導出 このように k^{1-a} のグローバルな収束スピードは一定となるが、ここで k 自体の収束スピードを求めよう。安定的鞍点経路上にある k につき、(16) より

$$k^{1-a} = \hat{k}^{1-a} + (k^{1-a} - \hat{k}^{1-a}) \exp \{-(1-a)gt\} \quad (17)$$

が成立する。(17)を微分して

$$\dot{k} = gk \left\{ \left(\frac{k}{\hat{k}} \right)^{a-1} - 1 \right\} \quad (18)$$

を得る。よって k のグローバルな収束スピード $\alpha(k)$ は、

$$\alpha(k) = -\frac{d\dot{k}}{dk} = \left\{ 1 - a \left(\frac{\hat{k}}{k} \right)^{1-a} \right\} g < g$$

と求まるが、これはもはや一定とはならない。収束スピードは正でなければならぬので

$$k > k' \equiv a^{\frac{1}{1-a}} \hat{k}$$

である。

図10は、 $\alpha(k)$ を示す。当然ではあるが $k = \hat{k}$ である時、

$$\alpha(k) = \beta(k) = (1-a)g \text{ となる。そして}$$

$$k \geq \hat{k} \iff \alpha(k) \geq \beta(k)$$

が成立する。

安定的鞍点経路に沿って \hat{k} に収束する k につき、 $k < (>) \hat{k}$ である時、 k が \hat{k} に収束するにつれて、収束スピード $\alpha(k)$ は次第に早く(遅く)なっていく。 $k = \hat{k}$ の時には、 $\alpha(k) = (1-a)g$ となる。

さらに、 $k < \hat{k}$ の時、 k が \hat{k} に近い程、収束スピードは早くなる。逆に $k > \hat{k}$ である時には、 k が \hat{k} と離れている程、収束スピードは早くなる。

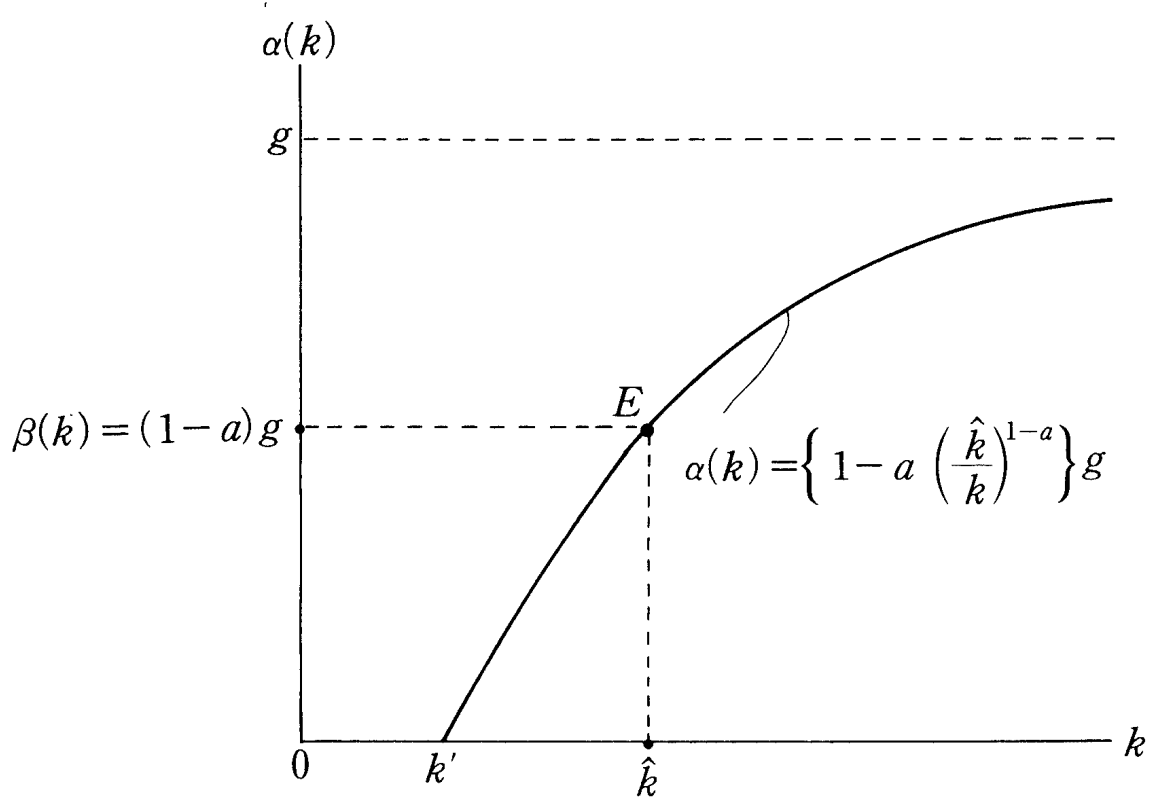
(18)に(17)を代入すると

$$\alpha(k) = \frac{g \exp \{(1-a)gt\}}{\left(\frac{k_0}{\hat{k}} \right)^{1-a} - 1 + \exp \{(1-a)gt\}}$$

を得る。

よってグローバルな収束スピードは、比率 k_0/\hat{k} の減少関数となる。 $k_0 < \hat{k}$ である時、他の条件が一定であると、距離 $(\hat{k} - k_0)$ が大きい程、 $\alpha(k)$

図10 グローバルな収束スピード $\alpha(k)$



(注) $k' \equiv a \frac{1}{1-a} \hat{k}$

は大きくなる。

$\alpha(k)$ のシフト パラメーターの変化が $\alpha(k)$ 曲線をシフトさせる方向は、

$$\frac{\partial \alpha(k)}{\partial s} \frac{s}{\alpha(k)} = - \frac{X}{g-X} < -1$$

$$\frac{\partial \alpha(k)}{\partial l} \frac{l}{\alpha(k)} = - \frac{bX}{g-X} < -b$$

$$\frac{\partial \alpha(k)}{\partial g} \frac{g}{\alpha(k)} = \frac{g}{g-X} > 1$$

$$X \equiv ag \left(\frac{k}{\hat{k}} \right)^{1-a} > 0$$

で示される。ここで $\alpha(k) = g - X > 0$ である。

したがって、 s の下落、 g の上昇は、かなり（あるいは弾力的に） $\alpha(k)$ 曲線を上方にシフトさせる。 l の減少は、 $\alpha(k)$ 曲線を上方にシフトさせる。

$\alpha(y)$ の導出 コブ・ダグラス型生産関数の仮定より

$$\frac{\dot{k}_0}{k} = \left(\frac{y_0}{\hat{y}}\right)^{\frac{1}{a}}, \quad \frac{\dot{y}}{y} = a \frac{\dot{k}}{k}$$

が成立するので、

$$\dot{y} = agy \left\{ \left(\frac{y}{\hat{y}}\right)^{\frac{a-1}{a}} - 1 \right\} \quad (19)$$

が求まる。したがって、 y の収束スピードは

$$\alpha(y) = g \left\{ a - (2a - 1) \left(\frac{y}{\hat{y}}\right)^{\frac{a-1}{a}} \right\}$$

となる。

ここで

$$\frac{d\alpha(y)}{dy} = \frac{(1-a)(2a-1)g}{ay} \left(\frac{y}{\hat{y}}\right)^{\frac{a-1}{a}} \leq 0 \iff a \leq \frac{1}{2}$$

である。

収束スピード $\alpha(y)$ が y の増加(減少)関数となるための必要十分条件は、

$$a > (<) \frac{1}{2}$$

である。 a が 2 分の 1 に等しいと、その時にのみ、 $\alpha(y)$ は一定値 ($g/2$) となる。

図11の(1)からも明らかであるが、 $a > 1/2$ の時、収束スピード $\alpha(y)$ が正であるためには

$$y > \left(\frac{2a-1}{a}\right)^{\frac{a}{1-a}} \hat{y} \equiv y'$$

でなければならない。

資本分配率 a の現実的な値が約0.3であるとするなら、 $\alpha(y)$ は y の減少関数となる。図11の(2)に示されるように、 y が大きくなるにつれ、 $\alpha(y)$ は次第に ag に接近していく。

図11から明らかであるが、 $a < 1/2$ のケースでは、 $y < (>) \hat{y}$ について、 y が \hat{y} から離れている程、収束スピード $\alpha(y)$ は早く (遅く) なる。そして、 $a > 1/2$ のケースでは、 $y < (>) \hat{y}$ について、 y が \hat{y} から離れている程、収束スピード $\alpha(y)$ は遅く (早く) なる。

$\alpha(y)$ 曲線のシフト ここで $Z \equiv (2a - 1)g(\hat{y}/y)^{\frac{1-a}{a}}$ とし、 $\alpha(y) = ag - Z > 0$ と書き改めよう。するとパラメーターの変化が $\alpha(y)$ 曲線シフトさせる方向は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha(y)}{\partial s} \frac{s}{\alpha(y)} &= -\frac{Z}{ag - Z} \cong 0 \\ \frac{\partial \alpha(y)}{\partial l} \frac{l}{\alpha(y)} &= -\frac{bZ}{ag - Z} \cong 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a \cong \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \alpha(y)}{\partial g} \frac{g}{\alpha(y)} = 1 + \frac{Z}{ag - Z} = \frac{ag}{ag - Z} \geq 1$$

(等号は $a = \frac{1}{2}$ の時)

で示される。さらに $Z < 0$ ($a < 1/2$) の時

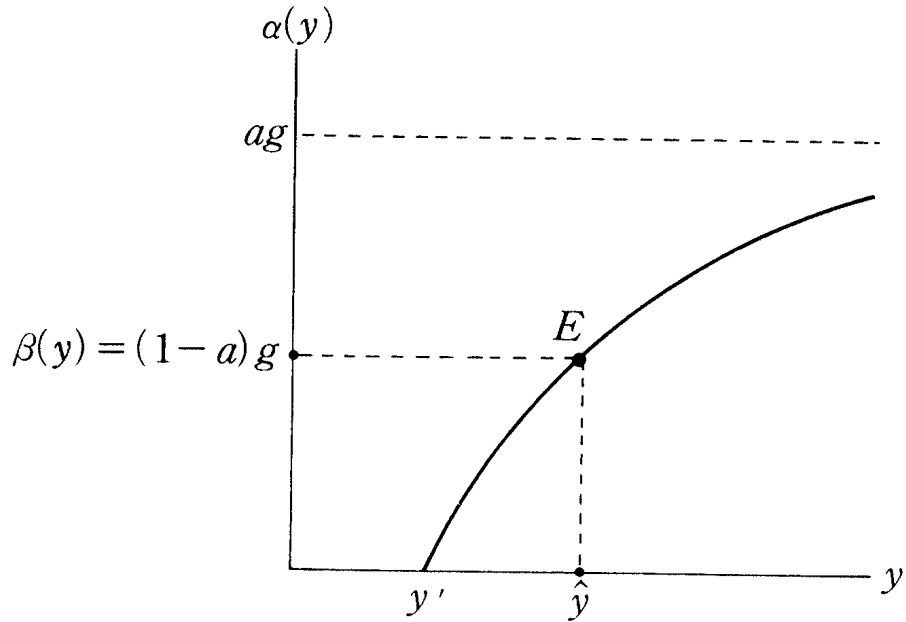
$$0 < \frac{\partial \alpha(y)}{\partial s} \frac{s}{\alpha(y)} < 1$$

となる。

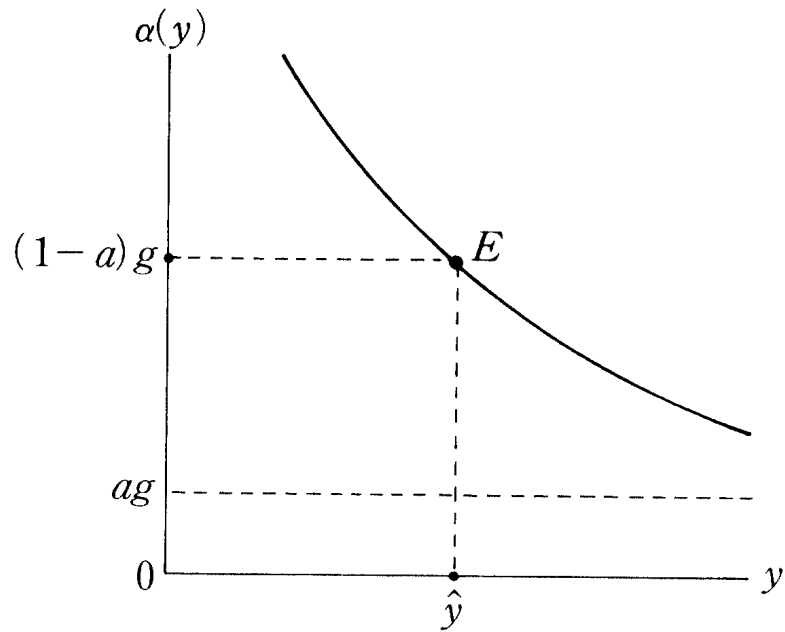
したがって、 $a < (>) 1/2$ の時は、 s の上昇、 l の増加は $\alpha(y)$ 曲線を上方 (下方) にシフトさせる。シフトの程度につき、 $a < 1/2$ の時、 s の上昇はあまり $\alpha(y)$ 曲線を上方にシフトさせない。最後に a が2分の1より大きい小さいかにかかわらず、 g の上昇はかなり $\alpha(y)$ 曲線を上方にシフトさせる。

図11 グローバルな収束スピード $\alpha(y)$

(1) $a > \frac{1}{2}$



(2) $a < \frac{1}{2}$



- (注) ① $\alpha(y) = \left[a - (2a-1) \left(\frac{\hat{y}}{y} \right)^{\frac{a-1}{a}} \right] g$
 ② $\hat{y} = \left(\frac{2a-1}{a} \right)^{\frac{a}{1-a}} \hat{y}$ である。

$\alpha(v)$ についてのノート 効率地価 v についてのグローバルな収束スピードについては、現段階では解明できなかったが、これにつき残されている問題点を示しておこう。

安定的鞍点経路上にある k の移行経路は、(17)より

$$k_t = [\hat{k}^{1-a} + (k_0^{1-a} - \hat{k}^{1-a}) \exp\{-(1-a)gt\}]^{\frac{1}{1-a}}$$

で示される。既知の k_0 に対し k_t の移行経路がこのように決まるので、安定的鞍点経路に沿って \hat{v} に収束する経路 $v_t = v(k_t)$ を(12)より求めたい。この $v(k)$ を政策関数という (Barro and Sala-i-Martin(1995)第2章を参照)。

これを求めるため(12), (7)より時間 t を消去すると

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv/dt}{dk/dt} = \frac{(r-g)v(k) - q}{sy - gk}$$

が、したがって

$$\frac{dv}{dk} = \frac{r-g}{sy-gk} v(k) + \frac{q}{sy-gk}$$

が導かれる。これは v の k に関する微分方程式である。この一般解は、

$$v(k) = N(k) \left\{ C - \int \frac{D(k')}{N(k')} dk' \right\} \quad (20)$$

と求まる。ここで、 C は任意の定数であり、

$$D(k) \equiv \frac{q}{sy - gk}$$

$$N(k) \equiv \exp \left[\int \frac{f_1(k', l) - g}{sf(k', l) - gk'} dk' \right]$$

である。

この安定的鞍点経路は鞍点 (\hat{k}, \hat{v}) を通るので、 $\hat{v} = v(\hat{k})$ が成立する。ここで、コブ・ダグラス型生産関数の仮定のもとでは、鞍点は

$$(\hat{k}, \hat{v}) = \left(\left(\frac{sl^b}{g} \right)^{\frac{1}{1-a}}, \frac{b}{(a-s)l} \frac{1-a-b}{1-a} \left(\frac{s}{g} \right)^{\frac{1}{1-a}} \right)$$

で与えられる。

鞍点 (\hat{k}, \hat{v}) における政策関数 $v(k)$ の傾きを求めよう。ロピタルの定理を用いて

$$v'(\hat{k}) = \frac{f_{11}(\hat{k}, l)\hat{v} + (\rho - g)v'(\hat{k}) - f_{12}(\hat{k}, l)}{s\rho - g}$$

を得るので、

$$v'(\hat{k}) = \frac{f_{12}(\hat{k}, l) - f_{11}(\hat{k}, l)\hat{v}}{(1-s)\rho}$$

となる。ここで

$$f_{11}(\hat{k}, l) = (a-1)\rho/\hat{k}, \quad f_{12}(\hat{k}, l) = b\rho/l$$

であるので、

$$v'(\hat{k}) = \frac{b}{(a-s)l} > 0$$

が導かれる。

これらの情報をもとに、一般解(20)の具体的な形を求めること、これが残された課題である。この課題を解明すると、 $\alpha(v)$ を求めることができるのである。

7-2 経済成長率

k と y との成長率 $G(k)$, $G(y)$ は, (18), (19)よりそれぞれ

$$G(k) = g \left\{ \left(\frac{k}{\hat{k}} \right)^{a-1} - 1 \right\}$$

$$G(y) = ag \left\{ \left(\frac{y}{\hat{y}} \right)^{\frac{a-1}{a}} - 1 \right\}$$

となる。両者の間には次の関係

$$G(y) = aG(k)$$

が成立する。

$G(k)$ は k の, $G(y)$ は y の単調減少関数である。

$G(y)$ のシフト ここで $m \equiv (\hat{y}/y)^{\frac{a-1}{a}}$ とすると,

$$G(y) = ag(m-1) \geq 0 \iff m \geq 1 \iff y \leq \hat{y}$$

となる。

所与の y について,

$$\frac{\partial m}{\partial s} \frac{s}{m} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial m}{\partial l} \frac{l}{m} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\partial m}{\partial g} \frac{g}{m} = -\frac{1}{a}$$

であるので,

$$\frac{\partial G(y)}{\partial s} = \frac{gm}{s} > 0$$

$$\frac{\partial G(y)}{\partial l} = \frac{bgm}{l} > 0$$

$$\frac{\partial G(y)}{\partial g} = -a + (a-1)m < 0$$

となる。

s の上昇, l の増加, g の低下は, $G(y)$ 曲線を上方にシフトさせる。

このシフトの程度を調べよう。

はじめに所与の $k < \hat{k}(m > 1, G(y) > 0)$ につき

$$\frac{\partial G(y)}{\partial s} \frac{s}{G(y)} = \frac{m}{a(m-1)} > 1$$

$$\frac{\partial G(y)}{\partial l} \frac{l}{G(y)} = \frac{bm}{a(m-1)} > 1 \quad \text{if } b \geq a$$

$$\frac{\partial G(y)}{\partial g} \frac{g}{G(y)} = -1 + \frac{m}{a(m-1)} > -1$$

となる。

したがって、 s の上昇は、 $G(y)$ 曲線をかなり上方にシフトさせる。土地分配率が資本分配率を下回らない ($b \geq a$) ならば、 l の増加は $G(y)$ 曲線をかなり上方にシフトさせる。 g の低下は、 $G(y)$ 曲線をあまり上方にシフトさせない。

続いて、所与の $y > \hat{y}$ ($m < 1$, $G(y) < 0$) について

$$-\frac{\partial G(y)}{\partial s} \frac{s}{G(y)} = \frac{m}{a(1-m)} \cong 1 \iff m \cong \frac{a}{1+a}$$

$$-\frac{\partial G(y)}{\partial l} \frac{l}{G(y)} = \frac{bm}{a(1-m)} \cong 1 \iff m \cong \frac{a}{a+b}$$

$$-\frac{\partial G(y)}{\partial g} \frac{g}{G(y)} = -\left\{1 + \frac{m}{a(1-m)}\right\} < -1$$

となる。

よって、 g の低下は、 $G(y)$ 曲線をかなり上方にシフトさせる。

ここで $m = a/(a+b)$ を満たす y を y_1 , $m = a/(1+a)$ を満たす y を y_2 としよう。すると $\hat{y} < y_1 < y_2$ となる。

$y < (>) y_2$ であると、 s の上昇により $G(y)$ 曲線はかなり (あまり) 上方にシフトする (しない)。

$y < (>) y_1$ であると、 l の増加により $G(y)$ 曲線はかなり (あまり) 上方にシフトする (しない)。

8 残された課題

残された課題のいくつかをあげよう。

(1) バブル

資本と完全代替的である資産「土地」が全く生産に貢献しない、つまり $F_2 = 0$ であるようなタイプの資産であるとしよう。

値上がり益のみを期待して、人々は「土地」を保有するであろう。効用を高めることはないし、生産にも貢献しないバブル資産に対し、人々はプラスの評価を下すかいなか、つまりバブル資産の価格が正となるかいなかの問題が残る。この問題は、われわれのモデルにおいて $F_2 = 0$, $q = 0$ とすれば、解明できるであろう。バブル資産を人々は保有することを示すことができる。次の機会に明らかにする。

(2) わが国の地価の国際比較

わが国の地価、地価総額・GDP比率などの指標は、他の国に比べ異常に高かったといわれる。このことは、比較動学により明らかになる。これらの指標ところまでのモデルのパラメータ s , l , g との関連を明らかにすればよい。

(3) 土地課税

土地課税のさまざまなタイプが経済成長に及ぼす効果や動学的効率性との関係が、明らかにされるべきである。

(4) 土地の内生的成長モデル

われわれのモデルは、外生的成長モデルであった。土地の内生的成長モデルの展開が、最後の残された課題である。土地のAKモデルを展開する予定である。

付録1 線形動学体系

体系(6), (7)を均衡成長解 (\hat{k}, \hat{v}) の近傍で線形化すると、動学は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{k} &= A_k(k - \hat{k}) + A_v(v - \hat{v}) \\ \dot{v} &= B_k(k - \hat{k}) + B_v(v - \hat{v}) \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

で近似できる。ここで A_k, A_v, B_k, B_v は、それぞれ k と v との均衡成長値

(\hat{k}, \hat{v}) で評価されてい、定数である。 k はジャンプできない先決変数 (状態変数) であり、 v はジャンプできる非先決変数 (制御変数) である。

この連立方程式の一般解は、

$$\left. \begin{aligned} k - \hat{k} &= C_{11} \exp(\lambda_1 t) + C_{12} \exp(\lambda_2 t) \\ v - \hat{v} &= C_{21} \exp(\lambda_1 t) + C_{22} \exp(\lambda_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

となる。ここで λ_1, λ_2 は、特性方程式

$$\lambda^2 - (A_k + B_v) \lambda + (A_k B_v - A_v B_k) = 0$$

の解である。ここで、 $\Delta = A_k B_v - A_v B_k$ とすると、特性方程式の解は、

$$\lambda = \frac{A_k + B_v \pm \sqrt{(A_k + B_v)^2 - 4\Delta}}{2}$$

である。特性方程式の判別式は、

$$(A_k + B_v)^2 - 4\Delta = (A_k - B_v)^2 + 4A_v B_k > 0$$

となり、二つの根は実根である。

さらに、

$$\lambda_1 \lambda_2 = \Delta = (s\hat{r} - g)(\hat{r} - g) + (1 - \alpha)glB_k < 0$$

が成立する。二根のうちひとつは負、他の根は正となる。つまり、

$$\lambda_1 = \frac{A_k + B_v - \sqrt{(A_k + B_v)^2 - 4A_v B_k}}{2} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{A_k + B_v + \sqrt{(A_k + B_v)^2 - 4A_v B_k}}{2} > 0$$

である。

$\lambda_1 < 0$ より、体系は鞍点安定的となる。

ここで (A2) を (A1) に代入すると、

$$\dot{k} = (A_k C_{11} + A_v C_{21}) \exp(\lambda_1 t) + (A_k C_{12} + A_v C_{22}) \exp(\lambda_2 t)$$

$$\dot{v} = (B_k C_{11} + B_v C_{21}) \exp(\lambda_1 t) + (B_k C_{22} + B_v C_{22}) \exp(\lambda_2 t)$$

を得る。この式と、(A2) を時間 t で微分して導かれる

$$\dot{k} = \lambda_1 C_{11} \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 C_{12} \exp(\lambda_2 t)$$

$$\dot{v} = \lambda_1 C_{21} \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 C_{22} \exp(\lambda_2 t)$$

とから、特性根 λ_i ($i = 1, 2$) に付随する固有ベクトル $[C_{1i}, C_{2i}]$ は、

$$\lambda_1 C_{11} = A_k C_{11} + A_v C_{21}$$

$$\lambda_2 C_{12} = A_k C_{12} + A_v C_{22}$$

$$\lambda_1 C_{21} = B_k C_{11} + B_v C_{21}$$

$$\lambda_2 C_{22} = B_k C_{12} + B_v C_{22}$$

を満たす。よって C_{21}, C_{22} は

$$\left. \begin{aligned} C_{21} &= \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} C_{11} = \frac{B_k}{\lambda_1 B_v} C_{11} \\ C_{22} &= \frac{\lambda_2 - A_k}{A_v} C_{12} = \frac{B_k}{\lambda_2 - B_v} C_{12} \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

と求まる。

状態変数 k の初期値 k_0 は既知であるが、制御変数 v の初期値 v_0 は未知である。後にみるように v_0 は k_0 の関数として決定されるが、しばらくはあたかも v_0 は既知であるかのごとく扱うことにしよう。

初期値 k_0, v_0 は、(A2) より、

$$\left. \begin{aligned} k_0 - \hat{k} &= C_{11} + C_{12} \\ v_0 - \hat{v} &= C_{21} + C_{22} \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

となる。この2番目の式に (A3) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} v_0 - \hat{v} &= \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} C_{11} + \frac{\lambda_2 - A_k}{A_v} C_{12} \\ &= \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} C_{11} + \frac{B_k}{\lambda_2 - B_v} C_{12} \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

を得る。したがって一般解 (A2) は、

$$k - \hat{k} = C_{11} \exp(\lambda_1 t) + C_{12} \exp(\lambda_2 t)$$

$$\begin{aligned}
v - \hat{v} &= \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} C_{11} \exp(\lambda_1 t) + \frac{\lambda_2 - A_k}{A_v} C_{12} \exp(\lambda_2 t) \\
&= \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} C_{11} \exp(\lambda_1 t) + \frac{B_k}{\lambda_2 - B_v} C_{12} \exp(\lambda_2 t)
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v - \hat{v} \\ = \end{aligned}} \right\} \quad (A6)$$

となる。

k はジャンプできないため、 C_{12} , C_{22} がゼロでないとする、 k は発散し続ける。このため安定的経路上に位置する (k, v) が (\hat{k}, \hat{v}) に収束するためには、 C_{12} , C_{22} はゼロでなければならない。すると (A4), (A5) より

$$\begin{aligned}
C_{11} &= k_0 - \hat{k} \\
C_{21} &= v_0 - \hat{v} \\
&= \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} (k_0 - \hat{k}) = \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} (k_0 - \hat{k})
\end{aligned}$$

が導かれる。したがってジャンプしうる非先決変数 v の初期値 v_0 は

$$\begin{aligned}
v_0 &= \hat{v} + \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} (k_0 - \hat{k}) \\
&= \hat{v} + \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} (k_0 - \hat{k})
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v_0 \\ = \end{aligned}} \right\} \quad (A7)$$

のように、 k_0 の関数として決定する。

以上より安定的鞍点経路については、

$$k - \hat{k} = (k_0 - \hat{k}) \exp(\lambda_1 t) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned}
v - \hat{v} &= (v_0 - \hat{v}) \exp(\lambda_1 t) \\
&= \frac{(\lambda_1 - A_k)}{A_v} (k_0 - \hat{k}) \exp(\lambda_1 t) \\
&= \frac{(\lambda_1 - A_k)}{A_v} (k - \hat{k}) \\
&= \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} (k_0 - \hat{k}) \exp(\lambda_1 t) \\
&= \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} (k - \hat{k})
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v - \hat{v} \\ = \end{aligned}} \right\} \quad (A9)$$

を示すことができる。安定的鞍点経路の傾きは、

$$\frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} = \frac{B_k}{\lambda_1 - B_v} > 0$$

より正となる。

同様にして発散する不安定的鞍点経路については、 $C_{11} = C_{21} = 0$ より

$$\begin{aligned} k - \hat{k} &= (k_0 - \hat{k}) \exp(\lambda_2 t) \\ v - \hat{v} &= (v_0 - \hat{v}) \exp(\lambda_2 t) \\ &= \frac{(\lambda_2 - A_k)}{A_v} (k - \hat{k}) \\ &= \frac{B_k}{(\lambda_2 - B_v)} (k - \hat{k}) \end{aligned}$$

を導出できる。不安定的鞍点経路の傾きは、負である。

安定的鞍点経路 XX と不安定的鞍点経路 ZZ 以外の移行経路は、一般解 (A6) で示される。 C_{11} , C_{21} , C_{21} , C_{22} は、ゼロではない。これらの移行経路では、終局的には k , v の相対的変化率は $\lambda_2 > 0$ に等しくなるので、 k と v とは発散していく。

図A1は、線形動学体系 (A1) の位相図である。安定的鞍点経路は右上りの直線 XX 、不安定鞍点経路は、右下りの直線 ZZ で示されている。

不安定鞍点経路 ZZ の傾きの絶対値は、安定的鞍点経路 XX の正の傾きよりも大きくなることを示そう。前者から後者を引くと、

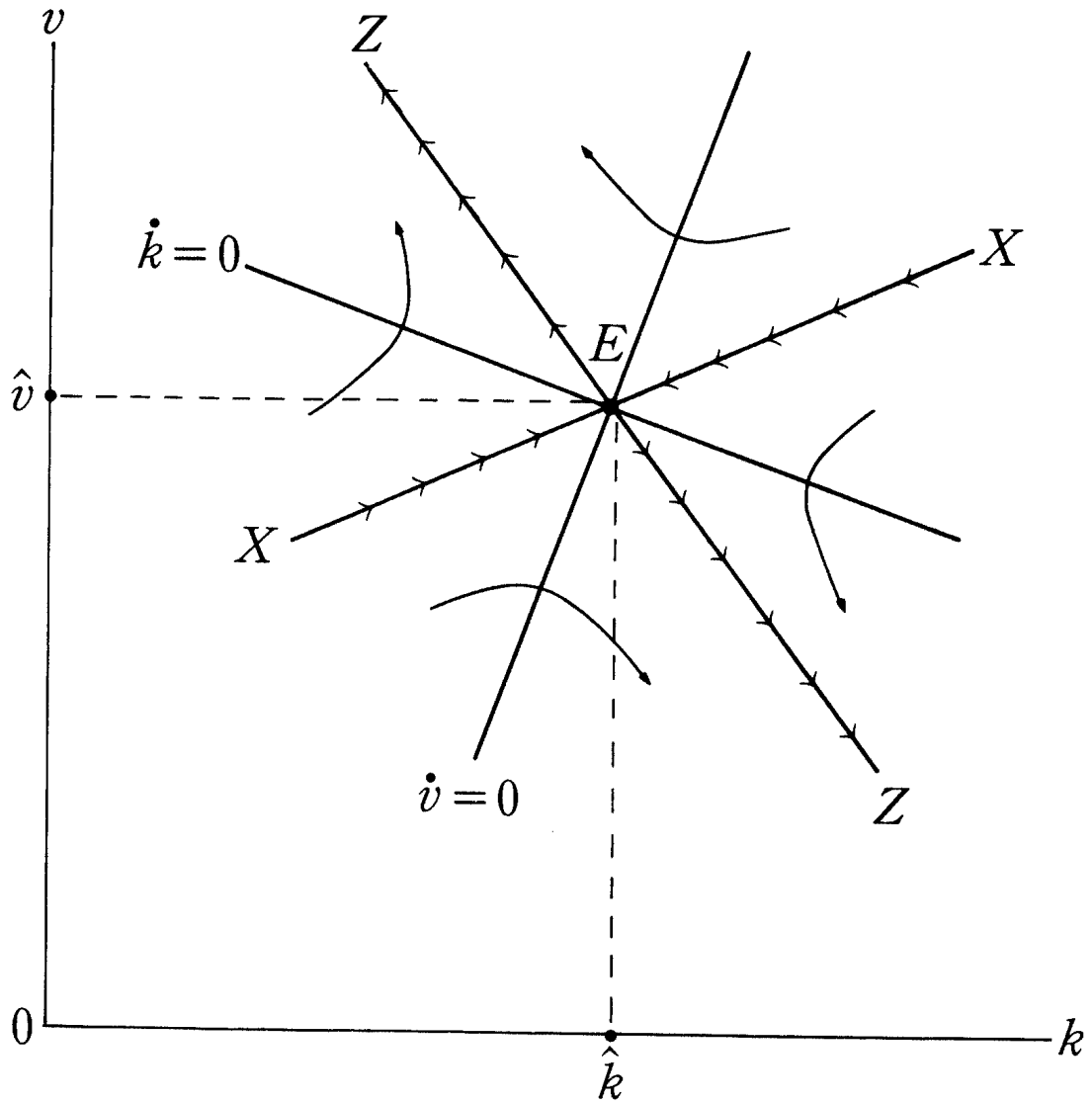
$$\frac{A_k - \lambda_2}{A_v} - \frac{\lambda_1 - A_k}{A_v} = \frac{2A_k - (\lambda_1 + \lambda_2)}{A_v} = \frac{(1-s)\hat{r} - (1-\alpha)lB_k}{(1-s)l\hat{r}} > 0$$

となるからである。

安定的鞍点経路においては、(A8), (A9) より

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \lambda_1 (k_0 - \hat{k}) \exp(\lambda_1 t) \\ &= \lambda_1 (k - \hat{k}) \end{aligned} \tag{A10}$$

図A1 線形動学体系の位相図



$$\left. \begin{aligned}
 \dot{v} &= \lambda_1 (v_0 - \hat{v}) \exp(\lambda_1 t) \\
 &= \lambda_1 (v - \hat{v}) \\
 &= \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - A_k)}{A_v} (k - \hat{k}) \\
 &= \frac{\lambda_1 B_k}{\lambda_1 - B_v} (k - \hat{k})
 \end{aligned} \right\} \quad (A11)$$

となる。

付録2 補完の偏弾力性

所得分配率をそれぞれ

$$\theta_1(k, l) = \frac{rk}{y} \quad (\text{資本の所得分配率})$$

$$\theta_2(k, l) = \frac{ql}{y} \quad (\text{土地の所得分配率})$$

$$\theta_3(k, l) = 1 - (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{労働の所得分配率})$$

とする。

生産要素間の補完の偏弾力性 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3, i \neq j$)

を, $\sigma_{ij} = YF_{ij}/F_iF_j$ と定義すると,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{yf_{12}}{f_1f_2} \quad (\text{資本と土地の補完の偏弾力性})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\frac{y(kf_{11} + lf_{12})}{f_1(y - kf_1 - lf_2)} \quad (\text{資本と労働の補完の偏弾力性})$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = -\frac{y(kf_{12} + lf_{22})}{f_2(y - kf_1 - lf_2)} \quad (\text{土地と労働の補完の偏弾力性})$$

が導かれる。

補完の偏弾力性と所得分配率, 生産の偏弾力性との間には,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial k} \frac{k}{f_2} \right) \frac{1}{\theta_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial l} \frac{l}{f_1} \right) \frac{1}{\theta_2}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial K} \frac{K}{F_3} \right) \frac{1}{\theta_1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial N} \frac{N}{F_1} \right) \frac{1}{\theta_3}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial L} \frac{L}{F_3} \right) \frac{1}{\theta_2} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial N} \frac{N}{F_2} \right) \frac{1}{\theta_3}$$

という関係がある。

生産要素の自己偏弾力性 σ_{ii} は,

$$\sigma_{11} = \frac{yf_{11}}{f_1^2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial k} \frac{k}{f_1} \right) \frac{1}{\theta_1}$$

$$\sigma_{22} = \frac{Yf_{22}}{f_2^2} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial l} \frac{l}{\theta_2} \right) \frac{1}{\theta_2}$$

$$\sigma_{33} = \frac{YF_{33}}{F_3^2} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial N} \frac{N}{F_3} \right) \frac{1}{\theta_3}$$

と定義される。

資本と土地は補完的であると仮定するので、 $\sigma_{12} > 0$ である。さらに、生産関数 F の一次同次性より、

$$K \cdot F_{11} + AL \cdot F_{12} + AN \cdot F_{13} = 0$$

であるので、

$$\sigma_{11} \theta_1 + \sigma_{12} \theta_2 + \sigma_{13} \theta_3 = 0$$

が成立する。 $\sigma_{11} < 0$, $\sigma_{12} > 0$ であるので、 σ_{13} は正負いずれの値をとりうる。

資本と労働は、補完的、代替的のいずれの可能性もある。

同様に

$$\sigma_{12} \theta_1 + \sigma_{22} \theta_2 + \sigma_{23} \theta_3 = 0$$

$$\sigma_{13} \theta_1 + \sigma_{23} \theta_2 + \sigma_{33} \theta_3 = 0$$

が成立する。

仮定 $\sigma_{12} > 0$ のもとでは、① $\sigma_{13} > 0$, $\sigma_{23} \geq 0$, ② $\sigma_{13} < 0$, $\sigma_{23} > 0$ である2つのケースのみが可能である。特に資本と労働とが代替的 ($\sigma_{13} < 0$) であると、土地と労働とは必ず補完的 ($\sigma_{23} > 0$) となる。

資本の所得分配率 $\theta_1(k, l)$ について

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial k} \frac{k}{\theta_1} \equiv \frac{k \theta_{11}}{\theta_1} = 1 - (1 - \sigma_{11}) \theta_1 \geq 0 \iff (1 - \sigma_{11}) \theta_1 \leq 1$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial l} \frac{l}{\theta_1} \equiv \frac{l \theta_{12}}{\theta_1} = (\sigma_{12} - 1) \theta_2 \geq 0 \iff \sigma_{12} \geq 1$$

が、土地の所得分配率 $\theta_2(k, l)$ について

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial k} \frac{k}{\theta_2} \equiv \frac{k \theta_{21}}{\theta_2} = (\sigma_{12} - 1) \theta_1 \geq 0 \iff \sigma_{12} \geq 1$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial l} \frac{l}{\theta_2} \equiv \frac{l \theta_{22}}{\theta_2} = 1 - (1 - \sigma_{22}) \theta_2 \geq 0 \iff (1 - \sigma_{22}) \theta_2 \leq 1$$

が、それぞれ成立する。

ここで

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_{11}) \theta_1 - 1 &= -\sigma_{11} \theta_1 - (1 - \theta_1) \\ &= \sigma_{12} \theta_2 + \sigma_{13} \theta_3 - (\theta_2 + \theta_3) \\ &= (\sigma_{12} - 1) \theta_2 + (\sigma_{13} - 1) \theta_3 \end{aligned}$$

であるので、

$$(1 - \sigma_{11}) \theta_1 \geq 1 \iff (\sigma_{12} - 1) \theta_2 + (\sigma_{13} - 1) \theta_3 \geq 0$$

となる。同様に

$$(1 - \sigma_{22}) \theta_2 \geq 1 \iff (\sigma_{12} - 1) \theta_1 + (\sigma_{23} - 1) \theta_3 \geq 0$$

$$(1 - \sigma_{33}) \theta_3 \geq 1 \iff (\sigma_{13} - 1) \theta_1 + (\sigma_{23} - 1) \theta_2 \geq 0$$

を示すことができる。

図A2は、 $(1 - \sigma_{11}) \theta_1 \geq 1$ を満たす $(\sigma_{13}, \sigma_{12})$ を示す。実現可能なペア $(\sigma_{13}, \sigma_{12})$ は、

$$-\sigma_{11} \theta_1 = \sigma_{12} \theta_2 + \sigma_{13} \theta_3 > 0$$

を満たさねばならない。よって、図A2における原点を通る左上りの直線 $\sigma_{11} \theta_1 = 0$ の上方に位置する $(\sigma_{13}, \sigma_{12})$ のみが生産可能である。

たとえば $\sigma_{12} > 1, \sigma_{13} > 1$ であると、 $(1 - \sigma_{11}) \theta_1 > 1$ となる。また、(i) $\sigma_{12} < 1, \sigma_{13} < 1$, (ii) $\sigma_{12} < 1 + (\theta_3 / \theta_2), \sigma_{13} < 0$ であると、 $(1 - \sigma_{11}) \theta_1 < 1$ となる。

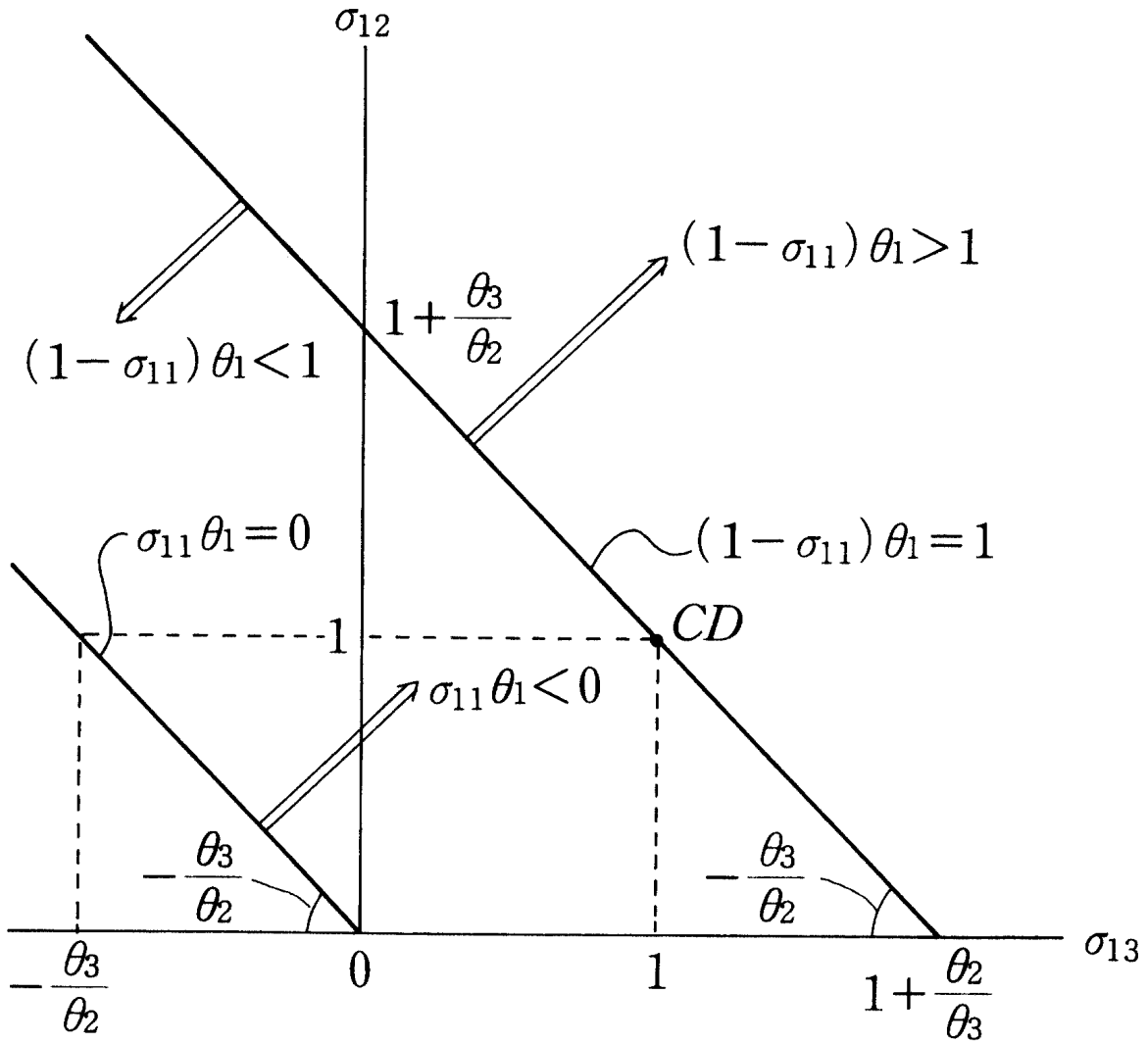
コブ・ダグラス型生産関数のもとでは、

$$(1 - \sigma_{ii}) \theta_i = \sigma_{ij} = 1 (i \neq j)$$

が成立する。図A2では、点CD(1,1)がこのケースに対応する。

これまでの結果を次のレマに要約する。

図A2 $(1 - \sigma_{11}) \theta_1 = 1$ の符号



[レンマ]

補完の偏弾力性と要素分配率の間には、以下の関係式が成立する。

- (1) $\sigma_{11} \theta_1 + \sigma_{12} \theta_2 + \sigma_{13} \theta_3 = 0$
 $\sigma_{12} \theta_1 + \sigma_{22} \theta_2 + \sigma_{23} \theta_3 = 0$
 $\sigma_{13} \theta_1 + \sigma_{23} \theta_2 + \sigma_{33} \theta_3 = 0$
- (2) $(\sigma_{12} - 1) \theta_1 + (\sigma_{13} - 1) \theta_3 \cong 0 \iff (1 - \sigma_{11}) \theta_1 \cong 1$
 $(\sigma_{12} - 1) \theta_1 + (\sigma_{23} - 1) \theta_3 \cong 0 \iff (1 - \sigma_{22}) \theta_2 \cong 1$
 $(\sigma_{13} - 1) \theta_1 + (\sigma_{23} - 1) \theta_2 \cong 0 \iff (1 - \sigma_{33}) \theta_3 \cong 1$

(3) $\sigma_{ii} < 0$, $\sigma_{12} > 0$ である時, (i) $\sigma_{13} > 0$, $\sigma_{23} \geq 0$, (ii) $\sigma_{13} < 0$, $\sigma_{23} > 0$ の二つの組合せのみが可能である。

参考文献

- Asako, K. (1991), The Land Price Bubble in Japan, *Ricerche Economiche*, 45, 167-184.
- Barro, R. J, and X. Sala-i-Martin (1995), *Economic Growth*, McGraw-Hill, First MIT Press edition 1999.
- Boone, P. and J. Sachs (1990), Is Tokyo Worth Four Million Dollars? An Explanation for High Japanese Land Prices, in Economic Planning Agency (Japan), *Structural Problems in the Japanese and World Economy*, Papers and Proceedings of the Fifth International Symposium, October 12-13, 1989, 161-197.
- Hahn, F. H. (1966), Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods, *Quarterly Journal of Economics*, 80, 633-664.
- Malinvaud, E. S. (1998), *Macroeconomic Theory, Volume B: Economic Growth and Short-term Equilibrium*, Elsevier.
- Meade, J. E. (1968), *The Growing Economy*, George Allen & Unwin.
- Nichols, D. (1970), Land and Economic Growth, *American Economic Review*, 60, 332-340.
- Shell, K., M. Sidrauski and J. E. Stiglitz (1969), Capital Gains, Income, and Saving, *Review of Economic Studies*, 36, 15-26.
- Tobin, J. (1965), Money and Economic Growth, *Econometrica*, 33, 671-684.
- 佐藤和夫 (1991), 土地とマクロ経済, 「日本経済研究」 No. 21 (5月), 2-13.
- 西村清彦・三輪芳郎編 (1990), 『日本の株価・地価』東京大学出版会