資本外部性と資産バブル

内　島　敏　之

この論文の目的は，資本外部性が存在する成長経済においてバブルは存在し得るか，つまりバブル資産価格が正となり得るかを検討することである。

Tiore(1985) は，資本外部性が存在しない世代重複（ＯＬＧ）モデルを用い，バブルの存在可能性を明らかにした。

Grossman and Yanagawa(1993) は，資本外部性が存在するＯＬＧモデルにおいて，バブルが存在し得ることを示した。しかし，彼らは，資本が労働生産性を比例的に高める（つまり以下で展開するモデルでの記号を用いると$a=1$）という特殊なケースを，いわゆるＡＫモデルを分析している。

この論文では，この資本外部性についての仮定を一般化し，ソローの外生的成長理論モデルにおけるバブル存在の可能性を論じる。さらに，バブル資産量の成長率が正であると一般化されている。

バブル資産量が一定であると，競争経済のバブル解では，一般に資本蓄積の過少性が導かれる。しかし，それが増加していると，バブル解が資本蓄積の社会的最適性を達成する可能性をもつことが明らかにされる。

バブル解の存在は，貯蓄行動パターンにも依存することが示される。このモデルでは，生産的所得のみならずバブル資産価値変動分をも可処分所得とみなし，このバブル資産価値変動分からの貯蓄率が１であると，バブル解が存在しないことが明らかになる。

続いて，資本外部性の分析を基盤にして，「負」の資本外部性，つまり

資本蓄積により混雑が発生するケースを分析する。このケースでは，バブル解は資本過剰となることが，つまり動学的非効率性が導かれることが示される。

資本外部性を考慮する成長モデルは，Romer (1986) をパイオニアとする内生的成長理論においてよくみられる。しかし，Aghion and Howitt (1998) が指摘するように，その20年以上も前にすでに Frankel (1962) が資本外部性の存在する外生的成長理論を展開している。これは，これまでほとんど見落とされてきた重要な論文である。

1　資本外部性

社会全体の資本ストック K は，個々の企業の生産量を増加させるという意味で外部性をもつ。この資本外部性関数を $A(K)$ とすると $A'(K)>0$ である。

技術進歩の議論と同様に，資本外部性を個別企業の生産関数にどのように導入するかにより，導かれる結果は異なってくる。企業 i の資本投入量を K_i，労働投入量を N_i，生産量を Y_i，そして K_i と N_i との一次同次の新古典派の生産関数を F とすると，たとえば

$$Y_i = A(K)F(K_i, N_i) = F(A(K)K_i, A(K)N_i)$$

$$Y_i = F(\mathrm{A}(K)K_i, N_i)$$

$$Y_i = F(K_i, A(K)N_i)$$

などの生産関数が考えられる。

第１のタイプは，資本外部性が直接的に資本と労働のそれぞれの生産性を等しく上昇させると考える。これに対し，第２のタイプは資本生産性のみを上昇させる（資本増加型）ものであり，最後のものは労働増加型であり，労働生産性のみを上昇させると仮定する。

この論文では，第３の労働増加型のタイプを採用する。均衡成長の一意性が導かれやすいからである。第１，第２のタイプでは，均衡成長の一意性は必ずしも得られず，分析は複雑になることが知られている。この点については，Benhabib and Gali (1995)が非常に参考となる。

資本外部性関数の変数をKではなく，１人当り資本K/N（Nは総労働投入量）とする研究もみられるが，ここではこのアプローチは採用しない。

以下では，資本外部性関数$A(K)$を特定化する。資本外部性の資本についての弾力性$KA'(K)/A(K)$が１であるケース，一定値aとなるケース，

$$A(K)=qK \quad (q\text{は正の定数})$$

$$A(K)=K^{a} \quad (0<a)$$

の二つが取り上げられる。

社会的生産関数と資本の社会的収益率

同質の企業の総数をhとしよう，すると，

$$K=hK_i,\quad N=hN_i,\quad Y=hY_i$$

であり，個別企業の生産関数のその投入量についての一次同次性より，

$$F(hK_i, A(K)hN_i)=hY_i=Y$$

が成立し，社会的生産関数は

$$Y=F(K, A(K)N)$$

と求まる。

社会的生産関数は，KとNにつき一次同次とはならず，規模に関して収穫逓増となる。これは，$\lambda>0$につき

$$F(\lambda K, A(\lambda K)\lambda N)>F(\lambda K, A(\lambda K)\lambda N)=\lambda Y$$

が成立するからである。

たとえば生産関数がコブ・ダグラス型であり，$A(K)=K^{a}$とすると

$$Y=K^{\alpha}(A(K)N)^{\beta}\ (\alpha+\beta=1, 0<\alpha, \beta<1)$$

$$=K^{\alpha+a\beta}N^{\beta}$$

となる。よって社会的生産関数は$1+a\beta$（>1）次の同次となる。弾力性aの値が大きい程，あるいは労働分配率βが大きい程（資本の私的分配率αが小さい程），規模に関する収獲逓増の程度は高まる。

資本の社会的収益率(社会的限界生産力)をρとすると，正のaにつき

$$\rho=\frac{\partial Y}{\partial K}=F_1+a\frac{A(K)NF_2}{K}>F_1$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}=-(1-a)\frac{A(K)NF_2}{K^2}\left\{(1-a)\left(\frac{KF_{12}}{F_2}\right)+a\right\}$$

$$=-(1-a)\frac{A(K)NF_2}{\sigma K^2}\{\theta+a(\sigma-\theta)\}$$

となる。ここで，

$$F_1=\frac{\partial F}{\partial K}(K,\mathrm{A}(K)N),\quad F_2=\frac{\partial F}{\partial A(K)N}(K,A(K)N)$$

$$F_{12}=\frac{\partial^2 F}{\partial K\partial \mathrm{A}(K)N}(K,A(K)N)$$

$$\sigma=\frac{F_1F_2}{YF_{12}}\ \text{（代替の弾力性）},\quad \theta=\frac{KF_1}{Y}\ \text{（資本の私的分配率）}$$

である。

したがって，$0<a<1$であると，資本の社会的収益率は逓減する。しかし，$a>1$であると，$\sigma\geqq\theta$のもとでは資本の社会的収益率は逓増する。たとえば資本と労働との代替の弾力性が１より小さくないと，ρの逓増性が得られる。もし$\sigma<1$であると，$\sigma>(<)(a-1)\theta/a$ならばρの逓増性（逓減性）が導かれる。

特に，生産関数がコブ・ダグラス型であると，

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}=\beta(a-1)(\alpha+a\beta)\frac{Y}{K^2}\gtrless 0\Leftrightarrow a\gtrless 1$$

である。

資本の社会的収益率（あるいは社会的限界生産力）ρ は，

$$\rho=\frac{\partial Y}{\partial K}=F_1+aF_2\frac{A(K)N}{K}=F_1+a\frac{WN}{K}=(1-a)F_1+a\frac{Y}{K}$$

となる。つまり，資本の社会的収益率は，資本の私的収益率と資本生産性との加重平均となり，さらに$0<a<1$であると，原点を通る社会的生産関数につき，

$$F_1<\rho<\frac{Y}{K}$$

が成立する。

家計が資本を供給する時，資本の社会的限界生産力を下まわる支払いF_1しかなされないのである。

弾力性 $a=1$ である時，社会的生産関数は K の一次式となるので

$$\rho=\frac{Y}{K}>F_1$$

となる。

$a>1$ であると，社会的生産関数が原点を通る時，

$$\rho<\frac{Y}{K}<F_1$$

となる。

2　モデル

各企業は総資本ストック K を所与とみなし，自己の利潤を最大にするよう投入量K_i，N_iを決定する。資本のレンタル価格をγ，賃金率をWとすると，企業 i につき

$$\gamma=F_1(K_i,A(K)N_i)$$

$$W=A(K)F_2(K_i,A(K)N_i)$$

が成立する。

経済全体については，同質である企業の数 h につき，F_1，F_2のゼロ次同次性より，

$$F_j(hK_i,\mathrm{A}(K)hN_i)=F_j(K,A(K)N),\quad j=1,2$$

となり，

$$\gamma=F_1(K,A(K)N) \tag{1}$$

$$W=A(K)F_2(K,\mathrm{A}(K)N) \tag{2}$$

が成立する。

資産は，資本とバブル資産との二つであるとする。生産に貢献せず，家計の効用を高めることもない資産をバブル資産とよぶ。バブル資産の数量をBとし，その価格をPとする。この実体のない資産の価格Pは正となり得るか，これが以下でのテーマである。以下では，生産物価格を1とする。バブル資産の実質価値PBをVと記す。

時間tに依存する変数$x(t)$につき，

$$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t\equiv\dot{x}$$

とする。

生産物Yは，消費財の供給，投資財の供給に向けられるので

$$Y=C+\dot{K}$$

が成立する。したがって

$$Y+\dot{V}=C+\dot{K}+\dot{V}$$

が導かれる。貯蓄Sは資産の増加と等しいので，

$$Y+\dot{V}=C+S$$

となる。したがって可処分所得は，生産物Yにバブル資産の価値変動分を加えたものになる。

ここで貯蓄関数を

$$S = sY + b\dot{V} \tag{3}$$

と仮定する。s は要素所得 Y からの一定の貯蓄率，b はバブル資産の価値変動分からの一定の貯蓄率である。

これらの定数 s，b につき

$0 < s < 1$，$0 \leqq b \leqq 1$

を仮定する。

生産物市場の均衡条件は

$$S = \dot{K} + \dot{V} \tag{4}$$

と示される。

(3)，(4) より，資本蓄積式は

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} - (1-b)\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)\frac{V}{K} \tag{5}$$

となる。

資本ストックとバブル資産とは，完全に代替的であると仮定しよう。資本ストック1単位の保有から得られる収益率は γ である。バブル資産1単位を保有することからの収益はキャピタル・ゲインのみである。バブル資産の価格の予想は完全であると仮定すると，二つの資産の収益率につき

$$\gamma = \frac{\dot{P}}{P}$$

が成立する。

労働の増加率は一定値 n であるとし，またバブル資産数量 B は一定値 $m \geqq 0$ で増加すると仮定する。

するとバブル資産の実質価値 V につき，

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{B}}{B} = \gamma + m$$

が成立する。これを資本蓄積式 (5) に代入すると

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K}(1-b)(\gamma + m)\frac{V}{K} \tag{6}$$

を得る。

以下では，効率労働１単位当りの変数を

$$y=\frac{Y}{A(K)N},\quad k=\frac{K}{A(K)N},\quad v=\frac{V}{A(K)N}$$

とする。

生産関数につき

$$y=F(k,1)\equiv f(k)$$

としよう。

すると(1)，(2)は，

$$\gamma=f'(k) \tag{7}$$

$$W\equiv\frac{W}{A(K)}=F_2=f(k)-kf'(k) \tag{8}$$

となる。資本蓄積式(6)は，

$$\frac{\dot{K}}{K}=\frac{sy}{k}-(1-b)(\gamma+m)\frac{v}{k} \tag{9}$$

となる。さらにkの定義より

$$\frac{\dot{k}}{k}=(1-b)\frac{\dot{K}}{K}-n$$

が成立する。

したがって(7)，(8)より，

$$\dot{k}=(1-a)\{sy-(1-b)(\gamma+m)v\}-nk \tag{10}$$

が導かれる。

さらに　$v=V/A(K)N$と(9)より

$$\dot{v}=\frac{v}{k}[a(1-b)(\gamma+m)v-\{asy-(\gamma+m-n)k\}] \tag{11}$$

を導くことができる。

この二つの動学方程式の解$k(t)$, $v(t)$を均衡経路とよぼう。この均衡経路のうち，$\dot{K}\geqq 0$を満たすものが実現可能 feasible な解である。$\dot{K}<0$となる解$k(t)$, $v(t)$は，実現不可能な均衡経路である。

実現可能である均衡経路のうち，$\dot{k}=0$，$\dot{v}=0$を同時に満たすkとvとを，長期均衡解とよぶ。

3　資本蓄積の黄金律

資本外部性が存在する時の資本蓄積の黄金律はいかなるものか，を明らかにしよう。

Sheshinski (1967) は，アローの学習 learning by doing モデルでの黄金律を導出したが，モデルの違いはあるもののその手法は，ここでの資本外部性モデルにも適用できる。

結論を先取りすると，資本の社会的収益率ρと自然成長率$n/(1-a)$とが等しいこと，これが$0<a<1$であるケースの黄金律であり，資本の私的収益率は，自然成長率よりも必ず小さくなる。

黄金律を導出しよう。はじめに

$$A(t)\equiv A(K(t))=K(t)^{a},\quad 0<a<1$$

$$k(t)=\frac{K(t)}{A(t)N(t)}$$

より

$$\frac{\dot{A}}{A}=a\frac{\dot{K}}{K}=\frac{a}{1-a}\left(\frac{\dot{k}}{k}+a\right)$$

である。この式を積分すると

$$A(t)=k(t)^{\frac{a}{1-a}}\exp\left(\frac{an}{1-a}t\right)$$

となる。したがって消費$C(t)$は，$N(0)=1$とすると

$$C(t)=\left\{\frac{C(t)}{A(t)N(t)}\right\}A(t)N(t)=C(t)k(t)^{\frac{a}{1-a}}\exp\left(\frac{n}{1-a}t\right)$$

となる。ここで$c(t)=C(t)/A(t)N(t)$である。

中央計画当局の直面する資源制約式

$$Y(t)=C(t)+\dot{K}(t)$$

より

$$\dot{k}(t)=(1-a)\{y(t)-c(t)\}-nk(t)$$

が導かれる。

長期均衡では，$\dot{k}=0$が成立し，$k(t)$，$y(t)$，$c(t)$は一定値k，y，cとなる。ここで

$$c=y-\frac{n}{1-a}k$$

である。長期均衡のもとでは，Y，K，Cはともに自然成長率$n/(1-a)$で成長する。

したがって，長期均衡消費Cを最大化するには，

$$L(k)=\left(y-\frac{n}{1-a}k\right)k^{\frac{a}{1-a}}$$

をkにつき最大化すればよい。一階の条件

$$\begin{aligned}L'(k)&=k^{\frac{a}{1-a}}\left\{f'(k)-\frac{n}{1-a}+\frac{a}{1-a}\frac{c}{k}\right\}\\&=\frac{1}{1-a}k^{\frac{a}{1-a}}\left(\rho-\frac{n}{1-a}\right)=0\end{aligned} \tag{12}$$

より，$0<a<1$につき，

$$\rho=\frac{n}{1-a}(>n)$$

が導かれる。以下，変数の黄金律解には，記号ハットを用いる。

二階の条件は，黄金律解 $\hat{k}$ の近傍につき

$$L''(\hat{k})=\frac{1}{1-a}\hat{k}^{\frac{a}{1-a}}\rho'(\hat{k})<0$$

である。$0<a<1$ のケースでは，$\rho'(k)<0$ であるので，二階の条件は満たされる。c の黄金律解は，(12) より

$$\hat{c}=\frac{(1-a)}{a}\{\hat{\rho}-f'(\hat{k})\}\hat{k}=(1-a)\{\hat{y}-\hat{k}f'(\hat{k})\}$$

となる。

したがって，黄金律のもとでは，消費率につき

$$\frac{C}{Y}=(1-a)(1-\theta)<1-\theta$$

となる。ここで $\theta=kf'(k)/y$（資本の私的分配率）である。

つまり消費・生産物比率は，労働分配率よりも小さくなる。

投資率については，

$$\frac{Y-C}{Y}=\frac{\rho k}{y}>\frac{kf'(k)}{y}$$

となり，それは資本の私的分配率より大きくなる。

競争経済が実現する資本の社会的収益率と効率労働 1 単位当り資本を，それぞれ単に ρ，k としよう。すると，

$$\rho \gtreqless \hat{\rho}=\frac{n}{1-a}\Leftrightarrow k\lesseqgtr\hat{k}$$

となる。

競争経済の ρ がその黄金律解と等しいと，競争経済の資本蓄積は社会的に最適となる。

競争経済の ρ が $\hat{\rho}$ を上回る（下回る）と，競争経済の資本蓄積は社会的にみて過少（過剰）となる。

黄金律解 $\hat{k}$ を上回る k は，動学的に非効率であるとよばれる。今日，資本ストックを廃棄することにより今日の消費を黄金律解 $\hat{C}$ まで高めることができ，さらに明日以降も今日の消費より大きな消費 $\hat{C}$ を享受できる。資本を減らすことにより，今日の消費も明日以降の消費も共に増やすことができるので，この資本の減少はパレート改善的である。この意味で動学的非効率性が生じる。

黄金律解 $\hat{k}$ より小さい k は，動学的に効率的である。資本を増加させる，つまり今日の消費を減らす（貯蓄を増やす）ことにより，明日以降は今日よりも大きい消費を手に入れることができる。今日の消費の減少による明日の消費の増加をもたらす資本の増加は，パレート改善的ではない。

4　新古典派成長モデルⅠ：$0<a<1$，$0<b<1$

ソロー解とバブル解

このケースの動学方程式(10)，(11)において，$\dot{k}=0$，$\dot{v}=0$を同時に満たす (k, v) を長期均衡解とよぶ。この時，資本Kならびにバブル資産Vは，効率労働$A(K)N$と同一の率で成長する。

この動学体系では，二つの non-trivial な長期均衡解が存在する。$k^{*}>0$，$v^{*}>0$である長期均衡解と，$k^{**}>0$，$v^{**}=0$とである長期均衡解であり，前者をバブル解，後者をソロー解とよぶことにする。

ソロー解は，(10)，(11)において$v=0$とする時の動学体系の長期均衡解（k^{**}，0），$k^{**}>0$であり，

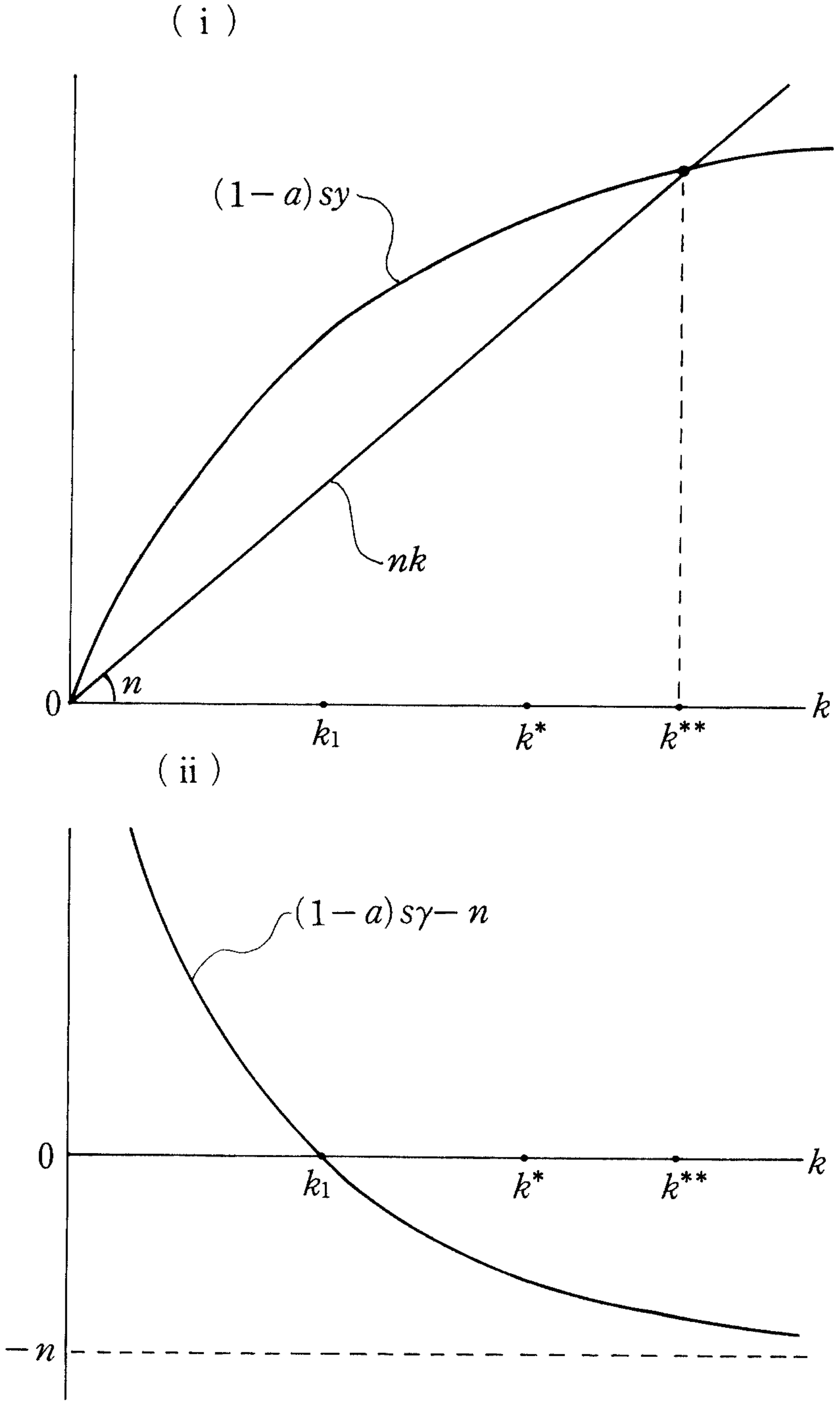
$$\dot{k}=(1-a)sy^{**}-nk^{**}=0$$

より

$$\frac{y^{**}}{k^{**}}=\frac{n}{(1-a)s}$$

が成立する。(**図 1** の（i))。

図1　ソロー解（$0<a<1$, $0<b<1$）



$$\frac{y^{**}}{k^{**}}=\frac{n}{(1-a)s}>\rho^{**}>\gamma^{**}$$

が成立するので，ソロー解は

$$(1-a)sy^{**}-n<0$$

を満たす(**図 1** の (ii))。

続いてバブル解 (k^{*},v^{*}) を導出しよう。

ここで $\dot{k}=0$, $\dot{v}=0$ より

$$v=\frac{(1-a)sy-nk}{(1-a)(1-b)(\gamma+m)}\equiv v(\dot{k}=0)$$

$$v=\frac{asy-(\gamma+m-n)k}{a(1-b)(\gamma+m)}\equiv v(\dot{v}=0)$$

となる。したがって

$$v(\dot{k}=0)-v(\dot{v}=0)=\frac{k}{a(1-b)(\gamma+m)}\left(\gamma+m-\frac{n}{1-a}\right) \tag{13}$$

が導かれる。

バブル解 k^{*}は，(13)がゼロとなるkの値として求まり，

$$\gamma^{*}+m=\frac{n}{1-a}$$

を満たす。

バブル解では，バブル資産Vの成長率$\gamma+m$と自然成長率$n/(1-a)$とは等しくなる。

新古典派の生産関数のもとで，次の仮定

$$\frac{n}{1\text{-}a}>m$$

をすれば，バブル解 k^{*}は一意に存在する。これは，自然成長率がバブル資産量Bの成長率を上回ることを意味する。

もし自然成長率がmを下回るならば，バブル解は存在しなくなる。

バブル解 v^*は，

$$v^* = \frac{(1-a)\,sy^* - nk^*}{(1-b)\,n}$$

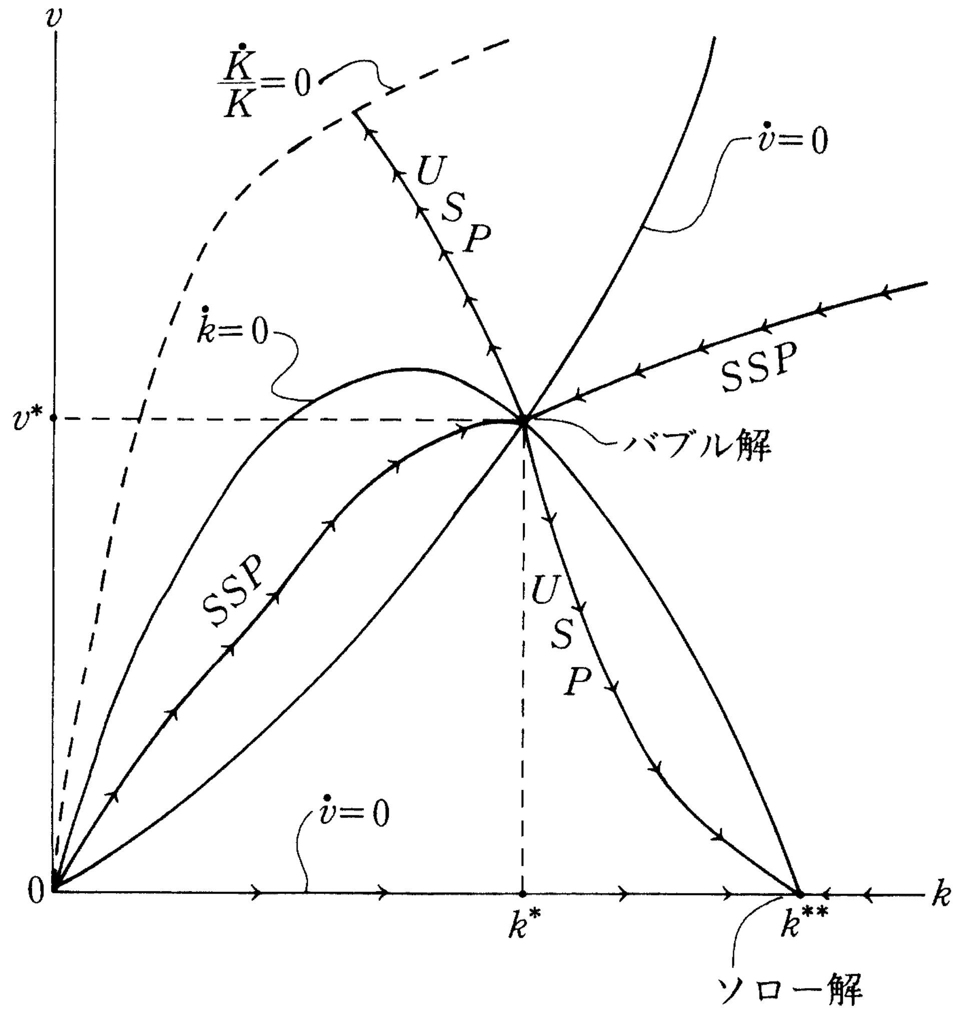
となる。

バブル解が存在する時，

$$\frac{y^*}{k^*} > \frac{n}{(1-a)\,s} = \frac{y^{**}}{k^{**}}$$

が成立するので，$k^* < k^{**}$が導かれる。バブルの存在は，kの均衡成長値を低下させる（**図 2**）。

図 2　バブル解とソロー解（$0 < a, b < 1$）



バブル解では

$$\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{*}=\left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right)^{*}=\frac{n}{1-a}$$

$$\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)^{*}=\gamma^{*}=\frac{n}{1-a}-m$$

$$\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)^{*}=\gamma^{*}+m=\frac{n}{1-a}$$

である。よって弾力性aの値の上昇は，K，Y，P，Vの均衡成長率を高めることになる。またバブル資産Bの増加率mは，バブル資産の価格の均衡上昇率をその分だけ低下させるが，他の成長率には影響を及ぼさない。

また労働１単位当りの資本と生産量，つまりK^{*}/NとY^{*}/Nとは，同一の率$an/(1-a)$で成長し，aの値が大きい程，その成長率は高くなる。

なお，バブルの存在は，資本集約度kを，したがってyを低下させることをみたが，資本と生産物の成長率には全く影響を与えず，ソロー解，バブル解の成長率は共に$n/(1-a)$であることに注意しよう。

ソロー解とバブル解の社会的最適性

ソロー解の資本の社会的収益率ρ^{**}につき

$$\rho^{**}-\frac{n}{1-a}=(1-a)\gamma^{**}+\frac{(a-s)a}{(1-a)s}\gtreqless 0 \Leftrightarrow \gamma^{**}\gtreqless\frac{(s-a)n}{(1-a)^{2}s} \qquad (14)$$

が成長する。

ソロー解の資本蓄積は，社会的にみて最適，過少，過剰のいずれにもなり得る。

ソロー解の資本蓄積の過少性のための十分条件としては，第１に$a \geqq s$が，次に

$$\frac{n}{1-a}\leqq\gamma^{**}<\frac{n}{(1-a)s}$$

があげられる。

ソロー解の資本蓄積が社会的にみて最適，あるいは過少である時，バブル解が存在すると必ず$k^* < k^{**}$であるので，バブル解では資本蓄積が過少となることに注意しよう。

次に，ソロー解において資本蓄積の過剰性が発生するには，$s > a$がその必要条件となる。

バブル解は資本蓄積の社会的最適性を達成できるかをみよう。

ソロー解が社会的に最適な，あるいは過少である資本蓄積を達成する時には，競争経済の資本蓄積は社会的にみて必ず過少となることをみた。したがって，バブルを伴う競争経済が資本蓄積の社会的最適性を実現できるためには，ソロー解の資本蓄積は必ず過剰となっていなければならない。

バブル資産価格Pは，資本の私的収益率γと同一の率で上昇する。したがって，社会的に最適なPの上昇率は

$$\hat{\gamma} \equiv \gamma(\hat{k})$$

となるので，

$$k^* \gtreqless \hat{k} \Leftrightarrow \gamma^* \gtreqless \hat{\gamma}$$

が従う。

バブルを伴う競争経済が資本過剰(過少)であると，そのバブル資産価格上昇率はその最適上昇率よりも低く(高く)なる。

バブル解の資本の社会的収益率ρ^*につき

$$\begin{aligned}\rho^* - \frac{n}{1-a} &= (\rho^* - \gamma^*) - m \\ &= \frac{a\,w^*}{k^*} - m\end{aligned}$$

となる。

$m = 0$であると，$k^* < \hat{k}$となり，バブル解の資本は過少蓄積となる。

$m > 0$ については，

$$\rho \gtreqless \frac{n}{1-a} \Leftrightarrow m \gtreqless \rho^* - \gamma^* = \frac{aw^*}{k^*}$$

となる。

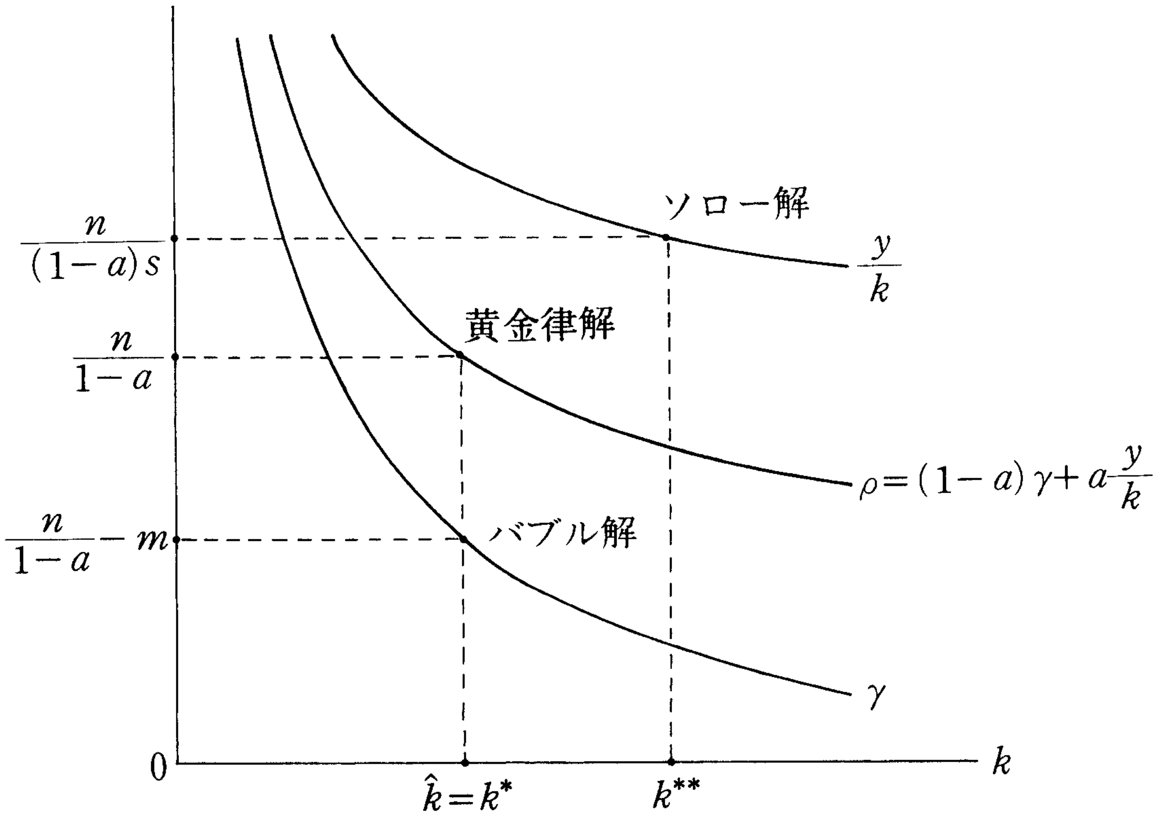
$m>0$である時には，二つのケースに分けて分析を進めよう。

A．ソロー解の資本蓄積が過剰であるケース

このケースでは，バブル資産Bの増加率mが資本の社会的収益率とその私的収益率との差$\rho-\gamma$に等しいならその時にのみ，競争経済は社会的に最適な資本蓄積を達成できる**(図3)**。

mが$\rho-\gamma$より小さい(大きい)時，競争経済における資本の過少(過剰)蓄積性が導かれ，バブル資産価格は社会的最適率よりも高い(低い)率で上昇する。

図3　競争経済の資本蓄積の社会的最適性 (0＜a, b＜1)



B　ソロー解の資本蓄積が社会的に最適，あるいは過少であるケース

このケースでは，バブル解の資本蓄積は必ず過少となり，その社会的最適性を達成することは不可能である。

バブル資産価格は,社会的にみて最適であるよりも大きな率で上昇する。

安定性と比較動学

動学方程式(10)と(11)の右辺を，それぞれ$G(k,v)$と$H(k,v)$とすると，

$$G_1(k,v)=(1-a)\{s\gamma-(1-b)\gamma'(k)v\}-n$$

$$G_2(k,v)=-(1-a)(1-b)(\gamma+m)<0$$

$$H_1(k,v)=-\frac{vA}{k^2}+\frac{[a(1-b)\gamma'(k)v-\{as\gamma-k\gamma'(k)-\gamma-m+n\}]v}{k}$$

$$H_2(k,v)=\frac{A}{k}+\frac{a(1-b)(\gamma+m)v}{k}$$

$$A\equiv a(1-b)(\gamma+m)v-\{asy-(\gamma+m-n)k\}$$

である。

ソロー解(k^*,v^*)について，

$$G_1(k^{**},0)=(1-a)s\gamma^{**}-n<0$$

$$G_2(k^{**},0)=-(1-a)(1-b)(\gamma^{**}+m)<0$$

$$H_1(k^{**},0)=0$$

$$H_2(k^{**},0)=\gamma^{**}+m-\frac{n}{1-a}<0$$

が成立するので，局所的安定性が得られる。

バブル解について，

$$G_1(k^*,v^*)=(1-a)\{s\gamma^*-(1-b)\gamma'(k^*)v^*\}-n$$

$$G_2(k^*,v^*)=-(1-b)n<0$$

$$H_1(k^*,v^*)=\frac{v^*}{k^*}[(1-b)(k^*+v^*)\gamma'(k^*)-\{as\gamma^*-(\gamma^*+m-n)\}]$$

$$H_2(k^*, v^*) = \frac{a(1-b)nv^*}{(1-a)k^*} > 0$$

となる。よって

$$G_1(k^*, v^*)H_2(k^*, v^*) - G_2(k^*, v^*)H_1(k^*, v^*) = (1-b)n\gamma'(k^*)v^* < 0$$

が導かれ，バブル解は鞍点となる。

ソロー解の比較動学は，**図 1** の(i)から明らかなように，

$$\frac{\partial k^{**}}{\partial s} > 0,\quad \frac{\partial k^{**}}{\partial n} < 0,\quad \frac{\partial k^{**}}{\partial a} < 0$$

となる。

バブル解については，

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{\partial k^*}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial n} = \frac{1}{(1-a)\ \gamma'(k^*)} < 0$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial a} = \frac{n}{(1-a)^2\gamma'(k^*)} < 0$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial m} = \frac{1}{\gamma'(k^*)} > 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial s} = \frac{(1-a)y^*}{(1-b)n} > 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial b} = \frac{v^*}{1-b} > 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial n} = \frac{1}{(1-a)\ \gamma'(k^*)} < 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial a} = \frac{1}{(1-b)n}\left[\{(1-a)s\gamma^* - n\}\frac{\partial k^*}{\partial a} - sy^*\right]$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial m} = \frac{\{(1-a)s\gamma^* - n\}}{(1-b)n}\frac{\partial k^*}{\partial m} < 0$$

となる。

バブル解では，貯蓄率 s，b は k に全く影響を与えないが，v^* を上昇さ

せる。

バブル資産Bの増加率mの上昇は，k^*を増加させるが，v^*を低下させる。

弾力性aの上昇は資本集約度k^*を低下させる。v^*への効果は，この段階では不明であるが，これを調べよう。ここで代替の弾力性σ

$$\sigma=\frac{\gamma w}{ky\gamma'(k)}$$

を導入しよう。すると，

$$\{(1-a)s\gamma^*-n\}\frac{\partial k^*}{\partial a}-sy^*$$
$$=-\frac{\{(1-s)\theta^*\sigma-s(1-\theta^*)\gamma^*y\}+m\sigma\{(1-s)\theta y^*+(\gamma^*+m)k^*\}}{k\gamma'(k)\sigma}$$

となるので，

$$\sigma\geqq\frac{s(1-\theta)}{(1-s)\theta}(>1)\Longrightarrow\frac{\partial v^*}{\partial a}>0$$

が導かれる。

図による説明

図2は，バブル解（k^*,v^*）とソロー解（$k^{**},0$）を示す。

(13)より，曲線$\dot{k}=0$は，$k<k^*$につき曲線$\dot{v}=0$の上方に，$k>k^*$につき曲線$\dot{v}=0$の下方に位置する。

またバブル解の近傍では，

$$\frac{dv}{dk}(\dot{v}=0)-\frac{dv}{dk}(\dot{k}=0)=\frac{G_1H_2-G_2H_1}{G_2H_2}>0$$

となるので，曲線$\dot{v}=0$の傾きは曲線$\dot{k}=0$の傾きよりも大きい。

曲線$\dot{k}=0$は，原点を通る。そしてその傾きは

$$\frac{dv}{dk}=\frac{(1-a)s\gamma-n}{(1-a)(1-b)(\gamma+m)}-\frac{\gamma'(k)v}{\gamma+m}$$

となる。$k<k_1$については，この傾きは必ず正となる。$k>k_1$については，kが大きくなるにつれ，この傾きは次第に小さくなると仮定している。

曲線 $\dot{k}=0$と横軸との交点（k^{**},0）がソロー解である。新古典派の生産関数のもとでは，このソロー解は一意に存在する。つまり曲線 $\dot{k}=0$は，$k>0$について必ず横軸と交わる。

曲線 $\dot{v}=0$の形状をみよう。

図 2 では，この曲線が原点を通るように描かれている。たとえば，コブ・ダグラス型生産関数の時はこのようになる。

単純化のためにすべての$k>0$ につき

$$\frac{say}{k}+n>\gamma+m$$

であると仮定する。

この仮定により，原点を通る曲線 $\dot{v}=0$は，第Ⅰ象限に留まる。

曲線 $\dot{v}=0$の傾きは，

$$\frac{dv}{dk}=-\frac{1}{a(1-b)(\gamma+m)}[\{(1-as)\gamma-(n-m)\}+\{k+a(1-b)v\}\gamma'(k)]$$

となるが，この符号は一般に確定しない。**図 2** では，$n>m$を仮定し，

$$(1-as)\gamma=n-m$$

を満たす k（これをk_2とする）が存在するとし，$k\geqq k_2$について曲線 $\dot{v}=0$の傾きが正になるように，曲線 $\dot{v}=0$が描かれている。

図 2 において，*SSP* は安定鞍点経路，*USP* は不安定鞍点経路である。

安定鞍点経路の下方の領域にある初期値（k_0,v_0）から出発する経済は，最終的にはソロー解（k^{**},0）に収束する。

逆に安定鞍点経路の上方領域にある初期値（k_0,v_0）から出発する経済は，有限の時点で $\dot{K}<0$となり，$\dot{K}>0$の制約を満たさなくなる。

安定鞍点経路 *SSP* 上に（k_0,v_0）があるとこの時にのみ，経済はバブル

解（k^*, v^*）に向かって収束する。

動学方程式(10)，(11)と $\dot{K}>0$ とを同時に満たす実現可能な解（k, v）は，安定鞍点経路 SSP 上か，あるいはその下方の領域に位置せねばならない。

実現可能な解（$k(t), v(t)$）については，所与の k の初期値 k_0 に対して，どのような v の初期値 v_0 から出発する均衡経路（$k(t), v(t)$）も必ず長期均衡解（バブル解あるいはソロー解）に収束する。したがって，均衡経路の不確定性が導かれる。

5　新古典派成長モデルⅡ：$0<a<1$，$b=1$

このケースの動学体系は，

$$\dot{k}=(1-a)sy-nk$$

$$\dot{v}=-\left\{\left(\frac{asy}{k}+n\right)-(\gamma+m)\right\}v$$

となる。

このケースでは，長期均衡解は，ソロー解（$k^{**}, 0$）のみであり，バブル解は存在しない。

これまでと同様に，ソロー解の k^{**} は，$(1-a)sy^{**}=nk^{**}$ を満たす。

このソロー解の局所的安定性をみよう。ソロー解の近傍では，

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}=(1-a)s\gamma^{**}-n<0,\quad \frac{\partial \dot{k}}{\partial v}=0$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial k}=0\quad ,\quad \frac{\partial \dot{v}}{\partial v}=\gamma^{**}+m-\left(\frac{asy^{**}}{k^{**}}+n\right)$$

となる。

先にみたように

$$(1-a)s\gamma^{**}-n<0$$

である。さらに

$$\frac{asy^{**}}{k^{**}}+n>\gamma^{**}+m$$

が成立すると，ソロー解は局所的に安定となる。

逆にもし

$$\frac{asy^{**}}{k^{**}}+n<\gamma^{**}+m \tag{16}$$

が成立するならば，ソロー解は鞍点となる。

ここで

$$\frac{asy^{**}}{k^{**}}+n=\frac{n}{1-a}=\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{**}$$

である。したがって，(15)は，ソロー解の近傍では資本蓄積率がバブル資産価値Vの成長率より大きいことを示す。次に(16)は，ソロー解の近傍でバブル資産価値Vが資本よりも早く成長するならば，ソロー解が局所的鞍点となることを示す。

ソロー解の資本蓄積の社会的最適性を確定する基準は，$m>0$のケースでは前と同様に(14)で与えられる。ソロー解が局所的に安定的であれ，鞍点であれ，その資本蓄積が社会的に最適となる可能性は残されている。

しかし，新しい次の結果を追加することができる。$m=0$であり，ソロー解は鞍点であるとしよう。すると，

$$\gamma^{**}>\frac{n}{1-a}>\frac{(s-a)n}{(1-a)^2 s}$$

が成立し，鞍点であるソロー解では，$m=0$である時には必ず資本蓄積は過少となる。

曲線 $(asy/k)+n$が曲線 $\gamma+m$の上方に，あるいは下方に位置するかは確定できない。この二つの曲線が交わることもあろう。

しかし，いずれにしても(15)，(16)が成立する限り，ソロー解は大域的に安定，あるいは鞍点になることを位相図を利用することにより確認できる。

図4は，すべてのkにつき，つまり大域的に

$$\frac{asy}{k}+n>\gamma+m \Leftrightarrow \dot{v}<0$$

が成立する，つまり効率労働$A(K)N$の成長率がバブル資産価値Vの成長率より大きい時の，ソロー解の大域的安定性を示す。

歴史的に所与であるk_0(kの初期値）に対して，ソロー解に収束するvの初期値v_0は無数に存在することになり，均衡経路の不確定性が生じる。

図4　ソロー解の大域的安定性（$0<a<1=b$）

$\left(\dfrac{asy}{k}+n>\gamma+m\text{ のケース}\right)$

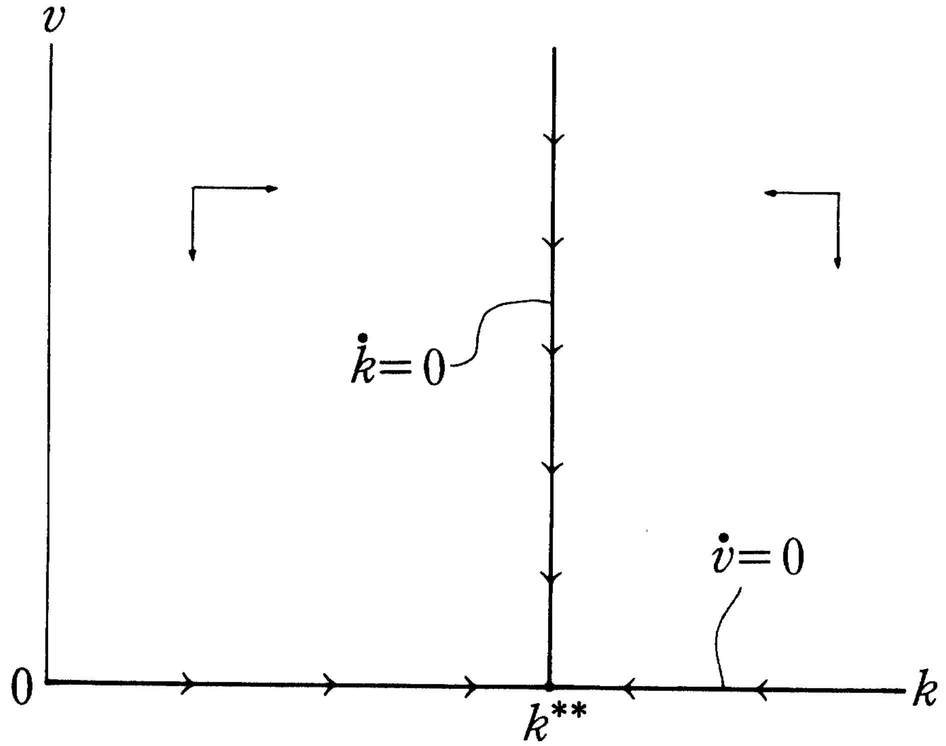


図5は，ソロー解が鞍点となるケースを示し，すべての$k>0$につき

$$\frac{asy}{k}+n<\gamma+m \Leftrightarrow \dot{v}>0$$

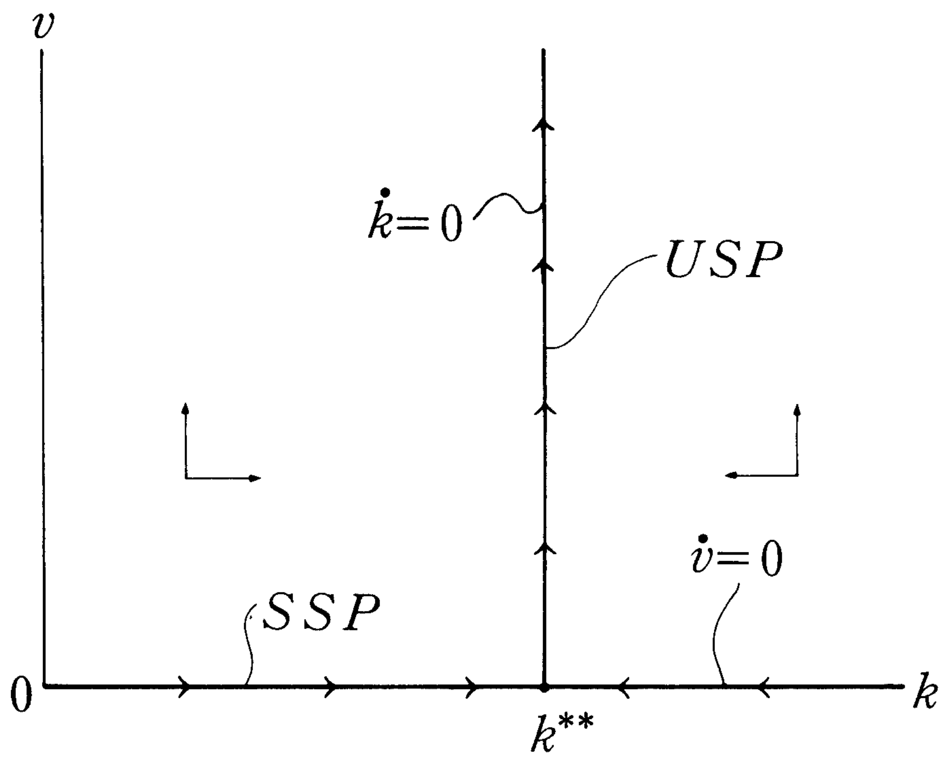
であると仮定している。垂直線$\dot{k}=0$は不安定鞍点経路USP，横軸は安定鞍点経路SSPである。

k_0が所与である時，ソロー解に収束する均衡経路のv_0はゼロと一意に決定される。

初期値$k_0>0$，$v_0>0$から出発する経済はたえまないvの上昇を経験する。バブル資産価格Pの上昇率につき

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)=\gamma'(k)\,\dot{k} \gtreqless 0 \Leftrightarrow k_0 \gtreqless k^{**}$$

図5　ソロー解の鞍点安定性（$0<a<1=b$）
$\left(\frac{asy}{k}+n<\gamma+m \text{のケース}\right)$



が成立する。$k_0>(<)k^{**}$から出発する経済のPの上昇率は加速（減速）していく。

時間の経過と共にkはk^{**}に収束していくので，バブル資産価格もまた有限の値γ^{**}に収束していく。

最終的なVの成長率は$\gamma^{**}+m$である。これに対して生産物の成長率は，最終的には$\dot{k}=0$であるので，$(asy^{**}/k^{**})+n=n/(1-a)$となる。

鞍点的ソロー解では，

$$\gamma^{**}+m>\frac{asy^{**}}{k^{**}}+n=\frac{n}{1-a}$$

が成立しているので，バブルは実体経済の規模に比べて拡大していく。

資本の蓄積率につき

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)=-\frac{s(y-\gamma k)}{k}\ \frac{\dot{k}}{k}\gtreqless\Leftrightarrow k_0\gtreqless k^{**}$$

であり，さらに

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}}{K}=\frac{sy^{**}}{k^{**}}=\frac{n}{1-a}<\gamma^{**}+m$$

となる。

つまり$k_0<(>)k^{**}$から出発する経済の資本蓄積率は，その自然成長率$n/(1-a)$を上回る（下回る）が，次第に減速（加速）しながら自然成長率に収束していく。

生産物の成長率の時間的経路をみよう。

いま

$$\frac{\dot{y}}{y}=\theta\frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{Y}}{Y}-a\frac{\dot{K}}{K}-n$$

より

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \{a + (1-a)\theta\} \frac{\dot{K}}{K} + n(1-\theta)$$

となる。したがって

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{n}{1-a}$$

である。

さらに

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{K}}{K} = (1-a)(1-\theta)\left(\frac{n}{1-a} - \frac{\dot{K}}{K}\right)$$

より

$$\frac{\dot{Y}}{Y} \gtrless \frac{\dot{K}}{K} \Leftrightarrow k_0 \gtrless k^{**}$$

が求まる。

一般的にはYの成長率は，単調に自然成長率に収束するとはいえず，振動しながら自然成長率に収束することもある。しかし，生産関数がコブ・ダグラス型 $y=k^{\alpha}$ であると，

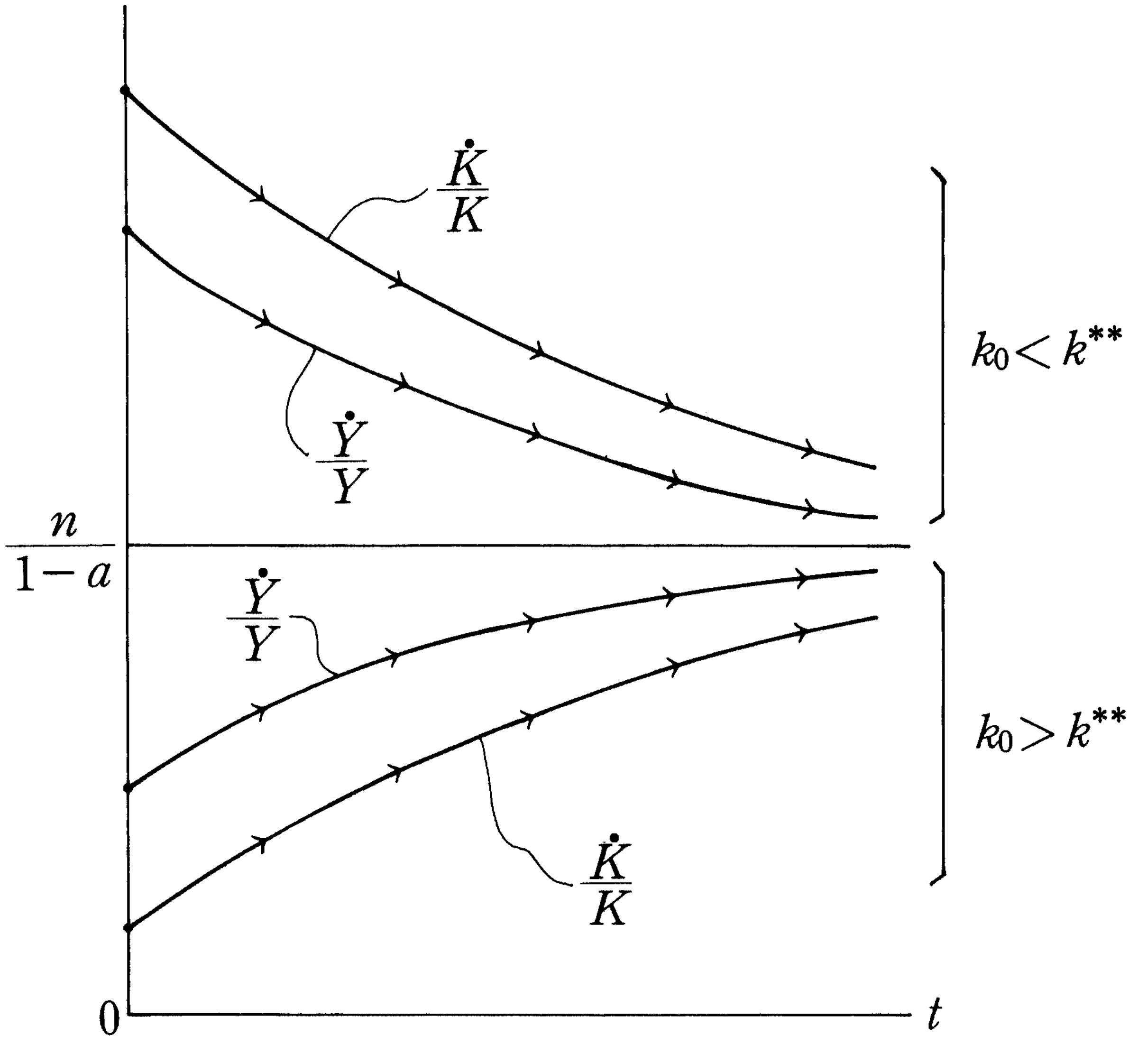
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right) = -\frac{s(1-\alpha)\{(1-a)\alpha+a\}}{k^2 y} \times \dot{k} \gtreqless 0 \Leftrightarrow k_0 \gtreqless k^{**}$$

が導かれる。

これら資本と生産物との各成長率の時間経路は，**図 6** に示されている。実体経済は，最終的にはYとKが一定の同一率で成長する balanced growth の状態となる。しかし，その成長率は，バブルVの成長率 $\gamma^{**}+m$ より低い。したがって，最終的には，バブルの実体経済に対する相対的サイズV/Yは無限大となる。

図6　資本と生産量との各成長率の時間経路（$0<a<1=b$）

（鞍点的ソロー解のケース）



6　AK モデル：$a=1$

資本外部性関数が$A(K)=qK$，つまり$a=1$であるケースを分析しよう。効率労働１単位当り資本kは$1/(qN)$となり，社会的生産関数は，

$$Y=\bar{A}\cdot K,\quad \bar{A}\equiv F(1,qN)$$

となる。

以下，労働供給Nは一定であると仮定する。すると，k, $\bar{A}$は一定となり，社会的生産関数の資本係数も一定となる。

資本の私的収益率γは，

$$\gamma=F_1(K,qKN)=f'(k)$$

と，その社会的収益率ρは，

$$\rho=F_1(K,qKN)+qNF_2(K,qKN)=\frac{y}{k}$$

となり，それぞれ一定，そして資本の社会的分配率 $\rho K/Y$は1となる。

消費Cは

$$C=Y-\dot{K}=\left\{\bar{A}-\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)\right\}K=\left\{\rho-\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)\right\}K$$

となる。消費が正であるためには

$$\bar{A}=\frac{y}{k}>\frac{\dot{K}}{K}$$

が成立する，つまり資本の社会的収益率は，適正成長率を上回っていなければならない。もしこの不等式が満たされないと消費はゼロ，または負となる。

このモデルでは，資本，生産物，消費は，同一の率で成長することになる。

このケースの動学体系は(9)，(11)から成る。(11)において，$\dot{v}=0$を満たすvの値がその長期均衡解であり，この値を(9)に代入すると資本蓄積率の長期均衡解が求まる。

I　$b=1$であるケース

最初は$b=1$，つまり資産の価値変動分が全て貯蓄されるケースをみよう。動学体系は

$$\dot{v} = \left(\gamma + m - \frac{sy}{k}\right) v \tag{17}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sy}{k} < \frac{y}{k} = \rho$$

となる。

さしあたり，$\gamma + m$とsy/kとは等しくないとしよう。明らかにvが正となる長期均衡解，つまりバブル解は存在しない。唯一の長期均衡解は$v = 0$である。この解をハロッド解（$v^H = 0$）とよぼう。ハロッド解では，資本，生産物，消費は適正成長率sy/kで成長する。

微分方程式(17)は，横軸に$v \geqq 0$を，縦軸に$\dot{v}$をとると，原点を通る直線となる。Vの成長率 $\gamma + m$が適正成長率sy/kより大きい（小さい）時，この直線は原点を通る右上り（左下り）となり，$v > 0$につき$\dot{v} > (<) 0$であるので，ハロッド解は大域的に不安定（安定）となる。

領域$v > 0$においては，

$$\frac{\dot{v}}{v} = (\gamma + m) - \frac{sy}{k} = \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{K}}{K}$$

となる。したがって，Vの成長率$\gamma + m$がKの成長率sy/kより大きい（小さい）と，vは一定の率で上昇（下落）し続け，実体経済に対するバブルのサイズV/Yは，無限大（ゼロ）に収束していく。

これまでの仮定をとり払い，

$$\gamma + m = \frac{sy}{k}$$

であるとすると，vの長期均衡解は唯一のハロッド解と$v > 0$である無数のバブル解とから成る。

バブル解では，

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{sy}{k} = \frac{\dot{V}}{V} = \gamma + m > \frac{\dot{P}}{P} = \gamma$$

となる。

経済は，どのような$v_0 > 0$から出発しても，そのままバブル解に留まり，バブルの実体経済に対する相対的規模V/Yは一定のままとなる。

Ⅱ　$0 < b < 1$であるケース

このケースの動学方程式は，

$$\dot{v} = \frac{v}{k}[(1-b)(\gamma + m)v - \{sy - (\gamma + m)k\}]$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sy}{k} - (1-b)(\gamma + m)\frac{v}{k}$$

である。

長期均衡解は，次のハロッド解とバブル解，

$$v^{H} = 0, \qquad \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{H} = \frac{sy}{k}$$

$$v^{*} = \frac{sy(\gamma + m)k}{(1-b)(\gamma + m)} \qquad \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{*} = \gamma + m$$

との二つとなる。

バブル解が存在するためには

$$\frac{sy}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{H} > \gamma + m = \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{*}$$

を，つまりバブルの存在は長期均衡成長率を低下させることを仮定せねばならない。

バブル解が存在する時には，資本の社会的収益率と成長率との間には

$$\rho = \frac{y}{k} > \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{H} > \left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^{*}$$

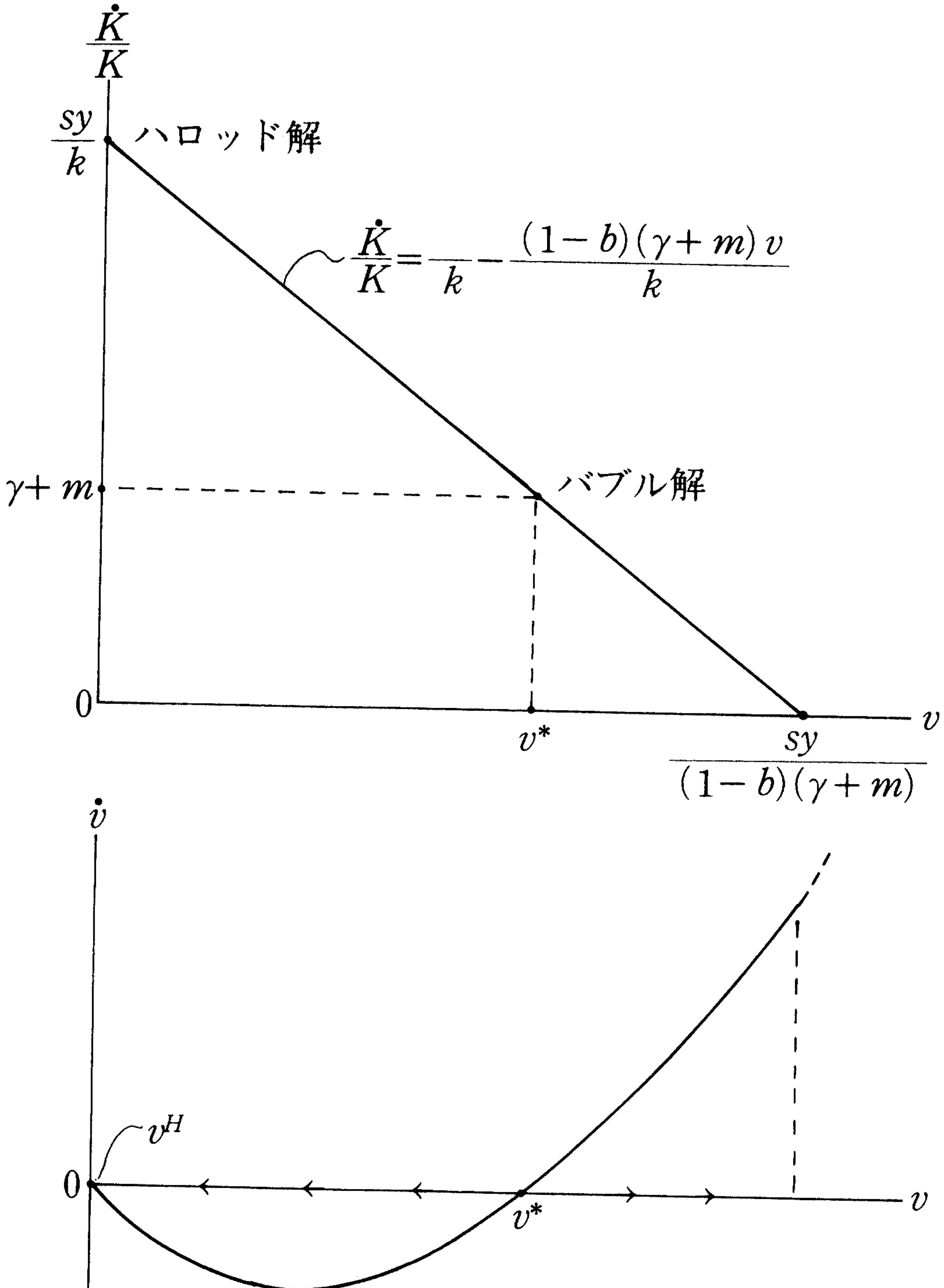
が成立する。

したがって，バブル解の消費

$$C = \{\rho - (\gamma + m)\}K$$

図 7　AK モデルのバブル解とソロー解

$(0 < b < 1 = a)$



は，必ず正となる。

ハロッド解とは異なり，バブル解の経済成長率は貯蓄率s，bから独立である。ハロッド解と同様に，qあるいはNの増大は，経済成長率を高める。

またバブル資産Bの増加率mは，その分だけ実体経済の成長率を高める。したがって，バブルの超中立性は導かれない。

しかし，mはkに全く影響を及ぼさないという意味では，バブルは中立的である。

図7から明らかなように，バブル解は局所的に安定であり，ハロッド解は局所的に安定となる。

$v_0 > v^*$から出発する経済は，いずれ$\dot{K} > 0$という制約を満たさなくなる。この意味で，$v_0 > v^*$を初期値とする均衡経路は実行不可能である。

これに対して，$v_0 < v^*$から出発する均衡経路はバブルが存在しない長期均衡解，つまりハロッド解に漸近的に収束する。

また，$v_0 = v^*$から出発する経済は，ずっとバブル解に留まることになる。

このように実行可能な解$v(t)$のうち長期均衡解に収束する均衡経路の初期値v_0は一意的に決定されず，均衡経路の不確定性が導かれる。

7　資本混雑性とバブル

これまでは資本蓄積がもたらす正の外部性について分析したが，ここで負の外部性，つまり

$$A'(K) < 0, \ a < 0$$

のケースにつきふれておこう。これは資本蓄積に伴う混雑 congestion 現象のケースに対応する。

社会的生産関数は，規模に関して収穫逓減となる。資本の社会的収益率

について，

$$\rho < \gamma < Y/K$$

となるが，その値は必ずしも正とはならない。つまり

$$\rho = \{\theta + a(1-\theta)\}\frac{y}{k} \gtreqless 0 \Leftrightarrow a \gtreqless -\frac{\theta}{1-\theta}$$

となる。aの絶対値が大きくなり，混雑性が増すと，資本の社会的収益率が負となる可能性が強まる。

次に

$$\rho'(k) = \{\theta + a(1-\theta)\}\frac{d}{dk}\left(\frac{y}{k}\right) + (1-a)\frac{y}{k}\frac{d\theta}{dk}$$
$$= \{a(\theta - \sigma) - \theta\}\frac{(1-\theta)y}{\sigma k^2}$$

である。したがって，

① $\theta + a(1-\theta) > (<) 0,\ \ \sigma \leqq (\geqq) 1 \Longrightarrow \rho'(k) < (>) 0$

② $\sigma \leqq \theta \Longrightarrow \rho'(k) < 0$

が導かれる。

生産関数がコブ・ダグラス型である時には，

$$\alpha + a\beta \gtrless 0 \Longrightarrow \rho'(k) \gtrless 0$$

が成立する。

混雑性とソロー解，バブル解

以下では，バブル解存在の可能性がある$0<b<1$のケースを扱う。動学方程式は，(10)，(11)で示される。

バブル解（k^*, v^*）が存在すると

$$\gamma^* + m = \frac{n}{1-a} < n$$
$$v^* = \frac{(1-a)sy^* - nk^*}{(1-b)n}$$

である。

バブル解が存在するためには，$\gamma^* > 0$より

$$m < \frac{n}{1-a} < n$$

が成立していなければならない。よって，バブル資産量の成長率は，労働人口増加率を下回らなければならない。

長期均衡では，

$$v = \frac{(1-a)sy - nk}{(1-a)(1-b)(\gamma + m)}$$

$$v = \frac{asy - (\gamma + m - n)k}{a(1-b)(\gamma + m)}$$

であるので，バブル解では，

$$(1-a)sy^* > nk^*$$

$$\frac{asy^*}{k^*} + n < \gamma^* + m$$

が成立する。

混雑性が存在する時のバブル解の自然成長率は，$0 < a < 1$である時のその値よりも小さくなる。

混雑性が存在する時，kのバブル解のは$0 < a < 1$のその値よりも大きくなり，vについては

$$\sigma \geqq \frac{s(1-\theta)}{(1-s)\theta} (>1)$$

であると，$0 < a < 1$ である時の値より大きい。

ソロー解についても，混雑性のもとでのkは，$0 < a < 1$である時の値よりも大きい。

$0 < a < 1$である時と同様に，バブル解は鞍点，ソロー解は局所的に安定となる。

図 8　混雑性とバブル解，ソロー解

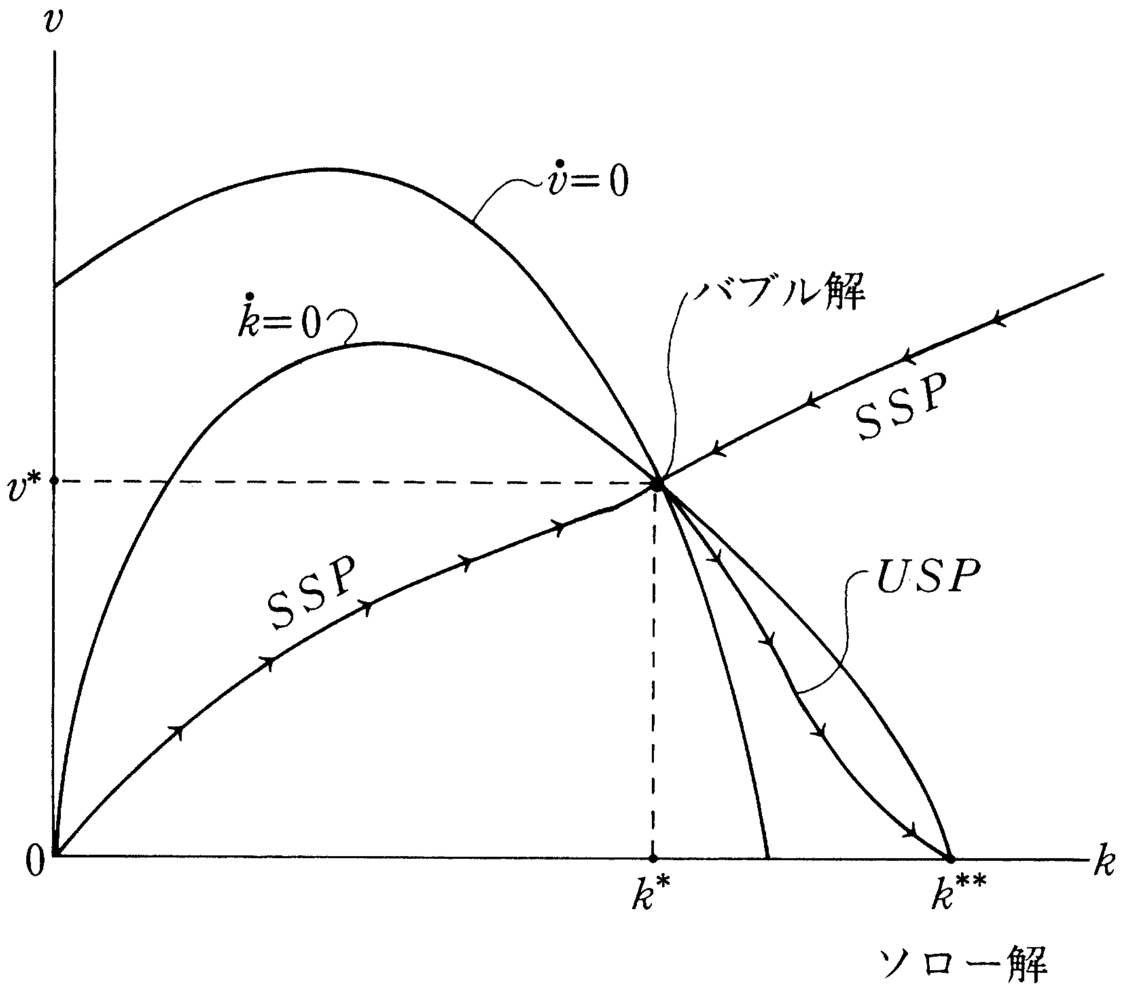


図 8 は，混雑性が存在する時の位相図である。

(13) より，領域 $k<(>)k^*$ においては，曲線 $\dot{v}=0$ は必ず曲線 $\dot{k}=0$ の上方（下方）に位置する。

さらに，バブル解の近傍では，曲線 $\dot{k}=0$ の傾きは，曲線 $\dot{v}=0$ の傾きよりも大きくなる。

比較動学の結果は，$a>0$ のケースと同じとなる。特に，混雑がひどくなる（つまり a の絶対値が大きくなる）と，ソロー解の k は増加し，バブル解についても k はやはり増加するが，

$$\sigma \geqq \frac{s(1-\theta)}{(1-s)\theta}$$

であると，vは下落する。

混雑性と資本蓄積の黄金律

混雑性が存在する時の黄金律解が存在するためには，まず資本の社会収益率は正でなければならない。しかも消費最大化の二階の条件より，ρはkの単調減少関数でなければならない。

もしρがkの単調減少関数でないと，黄金律解$\hat{k}$は必ずしも一意には存在せず，複数存在する可能性が生じる。

したがって，以下では簡単化の次のための仮定

$$\theta + a(1-\theta) > 0, \quad \sigma \leqq 1$$

をする。

この仮定をみたすkの集合をEとすると，混雑が存在する時のバブル解k^*とソロー解k^{**}は，この集合Eの内部に属していなければならない。

コブ・ダグラス型生産関数のもとでは，

$$E = \{k \mid 0 < k < \infty\}$$

となる。

代替の弾力性$\sigma < 1$である時には，θはkの単調減少関数であり，**図9**が示すように

$$E = \{k \mid 0 < \underline{k} < k < \bar{k} < \infty\}$$

となる。ここで，$\underline{k}$，$\bar{k}$はそれぞれ

$$\theta(\bar{k}) = -\frac{a}{1-a}, \quad \theta(\underline{k}) = 1$$

を満たす。

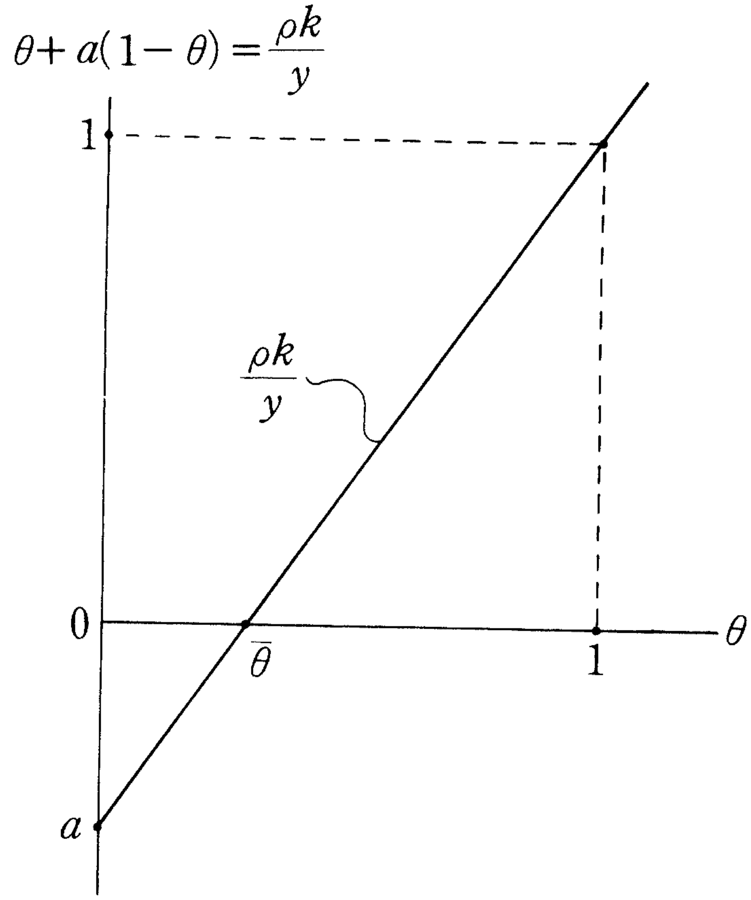
以下では，

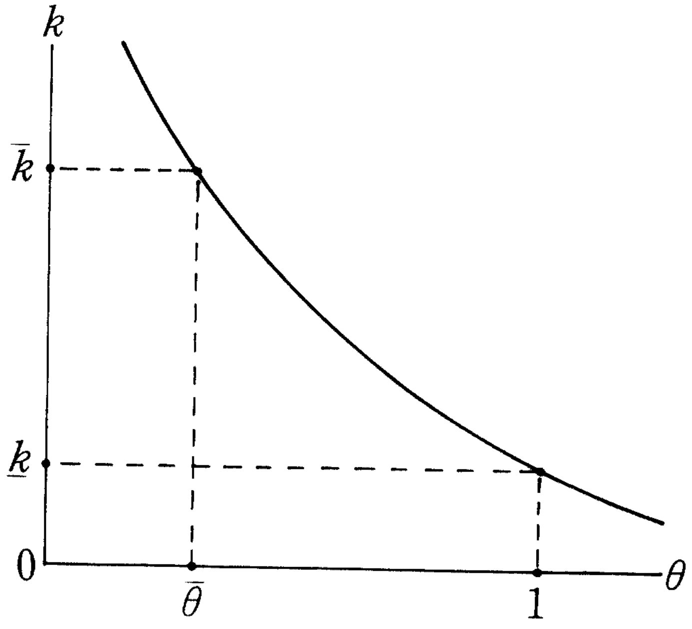
$$\underline{k} < k^*, \ k^{**}, \ \hat{k} < \bar{k}$$

であると仮定する。

混雑性のもとでの黄金律解では，

図 9　正である $\rho(k)$ が単調減少となる k の領域





$$\rho = \frac{n}{1-a} < n$$

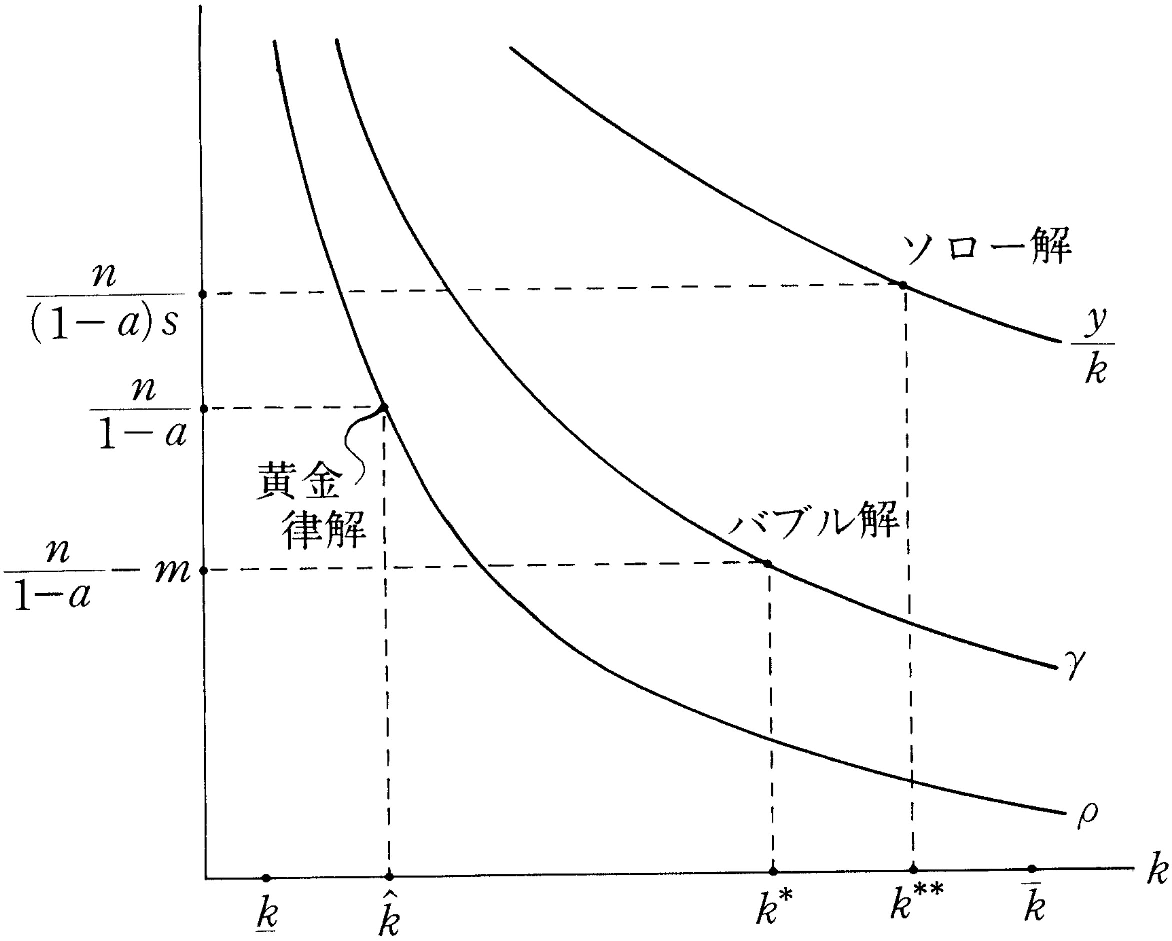
$$\frac{Y-C}{Y} = \frac{\rho k}{y} < \frac{kf'(k)}{y} = \theta$$

$$\frac{C}{Y} = (1-a)(1-\theta) > 1-\theta$$

が成立する。

資本の社会的収益率は労働人口増加率より小さく，投資率(貯蓄率)は資本の私的分配率より小さい。これに対し，消費率は労働分配率より大きい。

図10　混雑性とバブル解の動学的非効率性



競争経済の資本蓄積の動学的非効率性

黄金律解 $\hat{k}$ が一意に存在する時

$$\hat{\rho} = \frac{n}{1-a} > \frac{n}{1-a} - m = \gamma^*$$

が成立する。したがって，$\hat{k} < k^*$ が導かれる **(図10)**。バブル解では資本蓄積過剰となり，動学的非効率性が存在する。

さらに $k^* < k^{**}$ より，ソロー解もまた資本蓄積過剰となる。

バブル資産価格は，その社会的最適率よりも低い率で上昇する。

参考文献

Aghion, P. and Howitt, P., *Endogeneous Growth Theory*, MIT Press 1998.

Benhabib J. and Gali, J., On Growth and Indeterminancy: Some Theory and Evidence, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 43 (1995) 163-211.

Frankel, M., The Production Function in Allocation and Growth : A Synthesis, *American Economic Review* 52 (1962) 995-1022.

Grossman, G. M. and Yanagawa, N., Asset Bubbles and Endogeneous Growth, *Journal of Monetary Economics* 31 (1993) 3-19.

Romer, P. M., Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy* 94 (1986) 1002-1037.

Sheshinski, E., Optimal Accumulation with Learning by Doing, In K. Shell ed., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, MIT Press 1967, 31-52.

Tiore, J., Asset Bubbles and Overlapping Generations, *Econometrica* 53 (1985) 1499-1528.